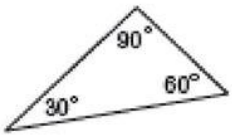
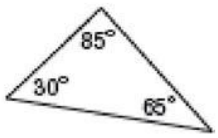
3-1 تصنيف المثلثات

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



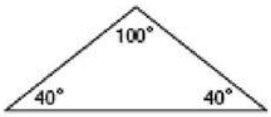
1)في المثلث زاوية قياسها 90°

إذاً المثلث قائم الزاوية



2)جميع زوايا المثلث أقل من 90°

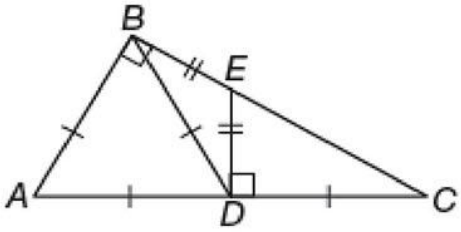
إذاً المثلث حاد الزوايا



3)في المثلث زاوية قياسها أكبر من 90°

إذاً المثلث منفرج الزاوية

صنف كلا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفقا لزواياها ولأضلاعها:



4)جميع زواياه أقل من 90° وجمع أضلاعه مساوية

إذاً المثلث متطابق الزوايا، ومتطابق الأضلاع

5)في المثلث زاوية قياسها 90° وأطوال أضلاعه مختلفة

إذاً المثلث قائم الزاوية، ومختلفالأضلاع

6) في المثلث زاوية قياسها 90° وأطوال أضلاعه مختلفة

إذاً المثلث قائم الزاوية، ومختلفالأضلاع

7) في المثلث زاوية قياسها أكبر من 90°وضلعين متطابقين

إذاً المثلث منفرج الزاوية، ومتطابق الضلعين

حقيبة

جبر: في كل من المثلثين الآتيين أوجد قيمة x وطول كل ضلع:

8) $FG = GH$ المثلث متطابق الأضلاع

$$x+5=3x-9$$

$$2x=14$$

$$x=7$$

$$FG=7+5=12$$

$$GH=3\times7-9=12$$

$$FH=2\times7-2=12$$

9) $LM = LN$

$$3x-2=2x+1$$

$$x=3$$

$$LM=3\times3-2=7$$

$$LN=2\times3+1=7$$

$$MN=5\times3-2=13$$

اوجد أطوال أضلاع ΔKPL في كل مما يأتي وصنفه وفقا لأضلاعه:

10) $KP=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$KP=\sqrt{(2-(-3))^2+(1-2)^2}$$

$$KP=\sqrt{26}$$

$$PL=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-1)^2}$$

$$PL=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$LK=\sqrt{(-3-(-2))^2+(2-(-3))^2}$$

$$LK=\sqrt{26}$$

المثلث متطابق الضلعين

11) $KP=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$KP=\sqrt{(3-5)^2+(4-(-3))^2}$$

$$KP=\sqrt{53}$$

$$PL=\sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2}$$

$$PL=\sqrt{25}=5$$

$$LK=\sqrt{(-1-5)^2+(1-(-3))^2}$$

$$LK=2\sqrt{13}$$

مختلف الأضلاع

12) $KP=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$KP=\sqrt{(-4-(-2))^2+(0-(-6))^2}$$

$$KP=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$PL=\sqrt{(3-(-4))^2+(-1-0)^2}$$

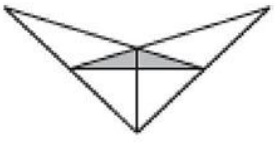
$$PL=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$LK=\sqrt{(3-(-2))^2+(-1-(-6))^2}$$

$$LK=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

المثلث متطابق الضلعين

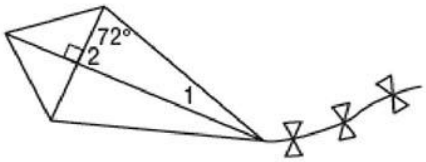
13)تصميم:



عدد الزوايا القائمة = 3 زوايا

3-2 زوايا المثلثات

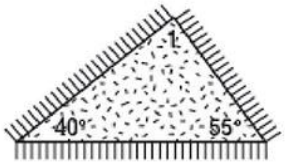
أوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكلين الآتيين:



1) $m\angle 2 = 90^\circ$

مجموع زوايا المثلث $m\angle 1 + m\angle 2 + 72 = 180$

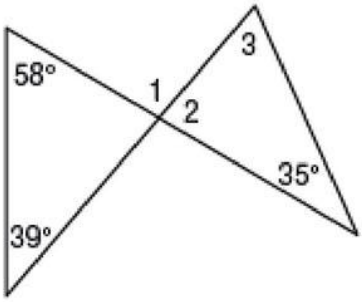
$m\angle 1 = 18^\circ$



2) مجموع زوايا المثلث $m\angle 1 + 40 + 55 = 180$

$m = 85^\circ$

أوجد قياس كل من الزوايا الآتية:



3) $m\angle 1 = 58 + 39$

$m\angle 1 = 97^\circ$

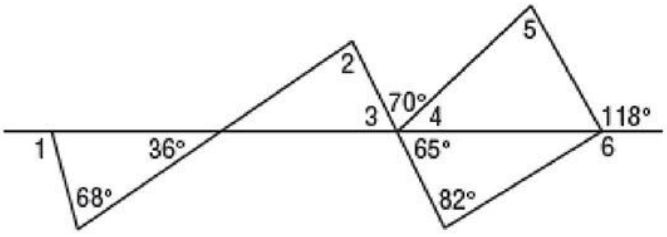
4) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$

$m\angle 2 = 83^\circ$

5) $m\angle 3 + m\angle 2 + 35 = 180$

$m\angle 3 = 62^\circ$

أوجد قياس كل من الزوايا الآتية:



6) $m\angle 1 = 36 + 68$

$m\angle 1 = 104^\circ$

7) $m\angle 4 + 65 + 70 = 180$

$m\angle 4 = 45^\circ$

8) $m\angle 3 + m\angle 4 + 70 = 180$

$m\angle 3 = 65^\circ$

9) $m\angle 2 + m\angle 3 + 36 = 180$

$m\angle 2 = 79^\circ$

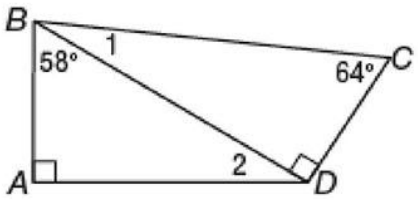
(10) $m\angle 4 + m\angle 5 = 118$

$m\angle 5 = 73^\circ$

(11) $m\angle 2 = 32^\circ \; m\angle 6 = 65 + 82$

$m\angle 6 = 147^\circ$

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:



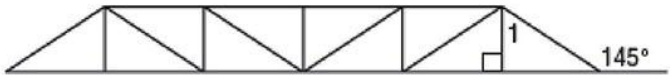
(12) $m\angle 1 + 90 + 64 = 180$

$m\angle 1 = 26^\circ$

(13) $m\angle 2 + 90 + 58 = 180$

$m\angle 2 = 32^\circ$

(14) **إنشاءات هندسية:**

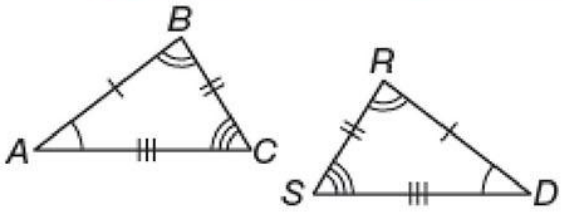


$m\angle 1 + 90 = 145$

$m\angle 1 = 55^\circ$

3-3 المثلثات المتطابقة

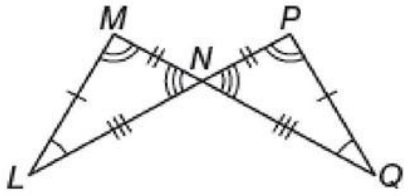
بين أن المثلثين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتطابقة ثم اكتب عبارة التطابق:



1) $\overline{BC} \cong \overline{RS}, \overline{BA} \cong \overline{RD}, \overline{DS} \cong \overline{AC}$

$\angle B \cong \angle R, \angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle S$

$\Delta BAC \cong \Delta RDS$



2) $\overline{ML} \cong \overline{PQ}, \ \overline{MN} \cong \overline{PN}, \ \overline{NQ} \cong \overline{NL}$

$\angle L \cong \angle Q, \ \angle \mathrm{M} \cong \angle \mathrm{P}, \ \angle \mathrm{MNL} \cong \angle PNQ$

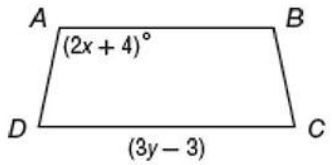
$\Delta LMN \cong \Delta QPN$

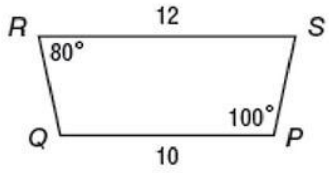
إذا علمت أن المضلع $ABCD \cong$ المضلع $PQRS$ فاوجد:

3) $2x+4=100$

$2x=96$

$x=48$

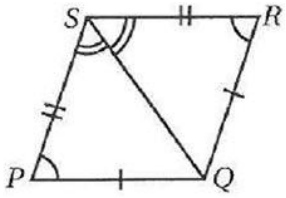




4) $3y-3=12$

$3y=15$

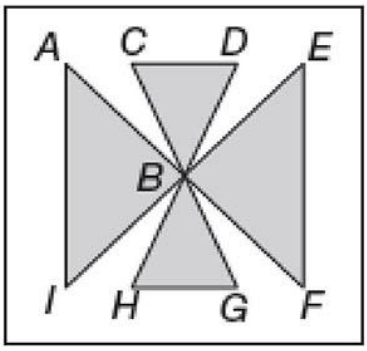
$y=5$



5) **البرهان:**

العبارات	المبررات
$\angle P \cong \angle R, \angle PSQ \cong \angle RSQ$	معطيات
$\angle PSQ = \angle RSQ$	نظرية الزاوية الثالثة
$\overline{PQ} \cong \overline{RQ}, \overline{PS} \cong \overline{RS}$	معطيات
$\overline{QS} = \overline{QS}$	خاصية الانعكاس
$\Delta PQS \cong \Delta RQS$	العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

6)رسم هندسي:



(a $\Delta ABL \cong \Delta EBF$, $\Delta CBD \cong \Delta HBG$

(b $\angle A \cong \angle E, \angle L \cong \angle F, \angle ABL \cong \angle EBF$

$\overline{AB} \cong \overline{EB}, \overline{BL} \cong \overline{BF}, \overline{AL} \cong \overline{EF}$

$\angle C \cong \angle H, \angle D \cong \angle G, \angle CBD \cong \angle HBG$

$\overline{CB} = \overline{HB}, \overline{BD} = \overline{BG}, \overline{CD} = \overline{HG}$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SAS, SSS

خمن أن المثلثين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتطابقة ثم اكتب عبارة التطابق:

1) $BQ=\sqrt{(7-0)^2+(6-5)^2}$ $DE=\sqrt{(1-(-6))^2+(2-1)^2}$

$PQ=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ $DE=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$QR=\sqrt{(5-7)^2+(0-6)^2}$ $EF=\sqrt{(-1-1)^2+(-4-2)^2}$

$QR=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ $EF=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$DF=\sqrt{(-1-(-6))^2+(-4-1)^2}$ $PR=\sqrt{(5-0)^2+(0-5)^2}$

$PR=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ $DF=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

بما أن الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه، فإنها تكون متطابقة

ويكون $\Delta DEF \cong \Delta PQH$

2) $BQ=\sqrt{(5-2)^2+(-4-(-2))^2}$ $DE=\sqrt{(-4-(-7))^2+(-1-(-3))^2}$

$BQ=\sqrt{13}$ $DE=\sqrt{13}$

$QR=\sqrt{(0-5)^2+(-5-(-4))^2}$ $EF=\sqrt{(-2-(-4))^2+(-5-1)^2}$

$QR=\sqrt{26}$ $EF=\sqrt{50}=2\sqrt{5}$

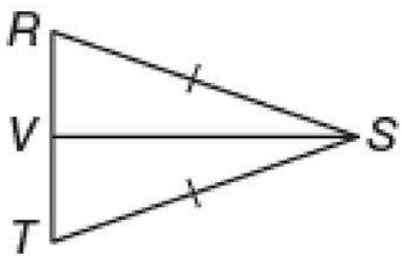
$PR=\sqrt{(0-2)^2+(-5-(-2))^2}$ $DF=\sqrt{(-2-(-7))^2+(-5-(-3))^2}$

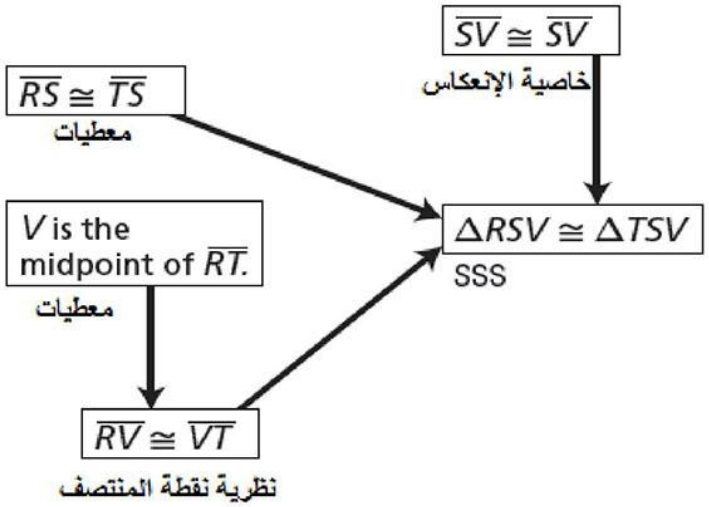
$PR=\sqrt{13}$ $DF=\sqrt{29}$

وبما أن الأضلاع المتناظرة غير متطابقة

فان ΔDEF , ΔPQH غير متطابقين

3) برهان:

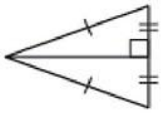




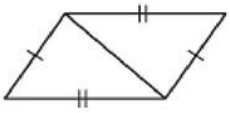
حدد المسلمة التى يمكن استعمالها لإثبات تطابق المثلثين فى كل من الأسئلة الآتية ، وإذا لم يكن إثبات تطابقهما ممكنا فاكتب (غير ممكن):

4) غير ممكن

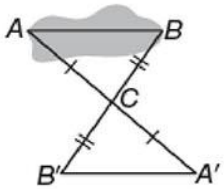
5) *SSS* أو *SAS*



6) *SSS*



7) **القياس غير المباشر:**



e $\angle ACB \cong \angle A'CB'$ زاويتين متقابلتين بالرأس

e $\overline{AC} \cong \overline{A'C},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C}$ SAS

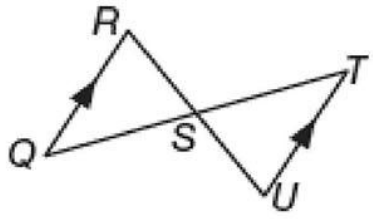
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta A'B'C$

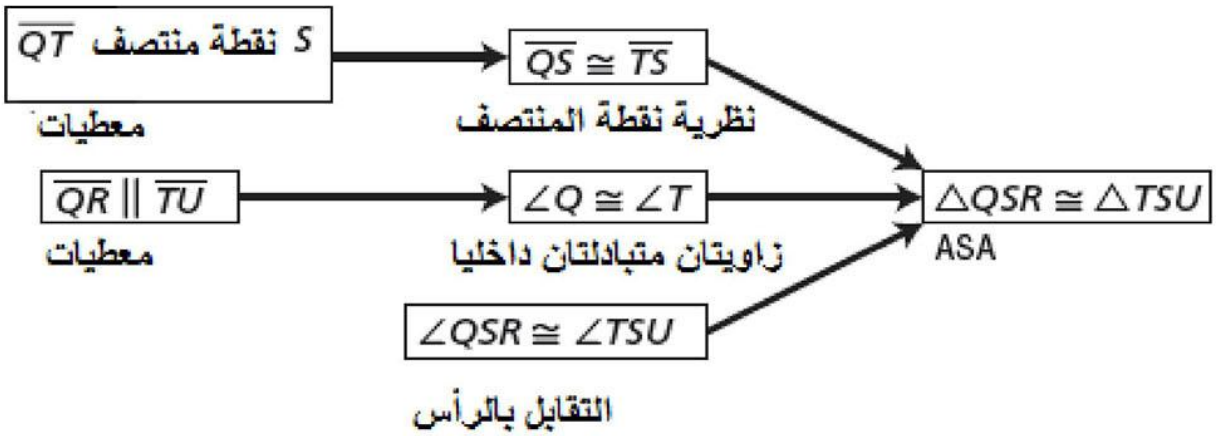
من تعريف التطابق ينتج أن AB و $A`B`$ متساويان

3-5 إثبات تطابق المثلثات *AAS, ASA*

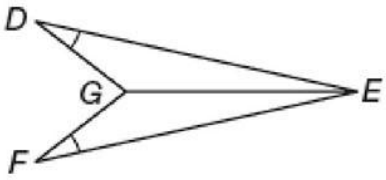
برهان: اكتب البرهان المحدد فى كل من السؤالين الآتيين:

1) s نقطة منتصف $\overline{QT}$





2) $\overline{GE}$ تنصف $\angle DEF$ تعريف منصف الزاوية



$\therefore \angle DEG \cong \angle FEG$

$\because \angle D = \angle F$

$\overline{GE} \cong \overline{GE}$ خاصية الانعكاس

$\therefore \Delta DEG \cong \Delta FEG$

بحسب المسلمة AAS العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة

فان $\overline{DG} \cong \overline{FG}$

هندسة العمارة:

3) بما أن D منتصف $\overline{AC}$

حقيقية

فإن $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف و

كذلك $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة وبحسب خاصية الانعكاس

لذلك فان $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ بحسب SSS

4)نعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

$\angle A = \angle C$

ونعلم ايضا أن $\overline{BD} \cong \overline{BD}$

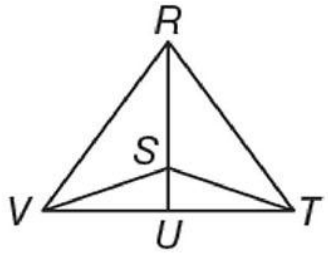
بحسب خاصية الانعكاس

وبما أنه لا يمكن إثبات تماثل مثلثين في حالة SSA

لذا لا يمكن الحكم على تطابق المثلثين $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ في هذه الحالة.

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:



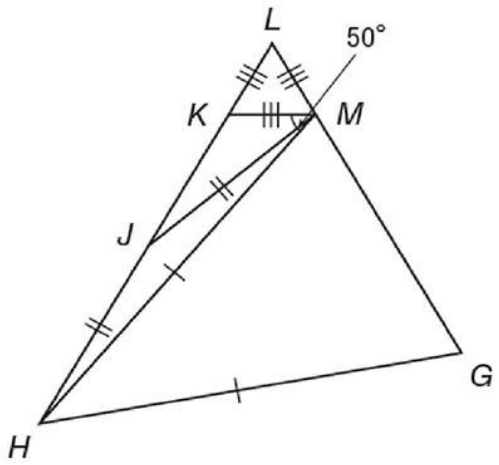
(1) $\angle RTV \cong \angle RVT$

(2) $\angle SVB \cong \angle SRV$

(3) $\overline{ST} \cong \overline{SR}$

(4) $\overline{ST} \cong \overline{SV}$

اوجد قياس كل مما يأتي:



(5) $m\angle KML = 60^\circ$

(6) $m\angle HMG = \big(180 - \big(50 + 60\big)\big) = 70^\circ$

(7) $m\angle GHM = \big(180 - \big(70 + 70\big)\big) = 40^\circ$

(8) $\because \overline{JM} = \overline{JH}$

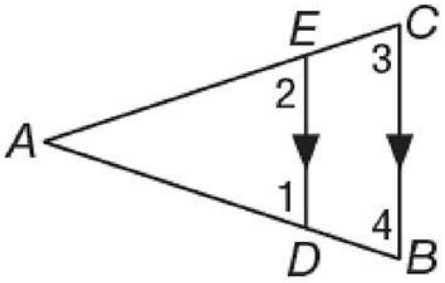
$\therefore m\angle JHM = m\angle MH$

$\because m\angle HJM = 145^\circ$

$\therefore m\angle MHJ = (180 - 145) \div 2$

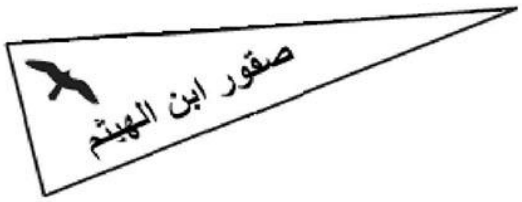
$\therefore m\angle MHJ = 17{,}5$

9)برهان:



العبارات	المبررات
$\overline{DE} \square \overline{BC}$	معطي
$\angle 1 \cong \angle 4$ $\angle 2 \cong \angle 3$	الزاويتان المتناظرتان متطابقتان
$m\angle 1 = m\angle 2$	معطي
$m\angle 3 = m\angle 4$	تطابق الزوايا
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	إذا تطابقت زاويتان في مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان

10) رياضة:



بما أن قياس زاوية الرأس = 18

إذاً قياس زاويتي القاعدة = 18 – 180= 162

بما أن المثلث متطابق الضلعين

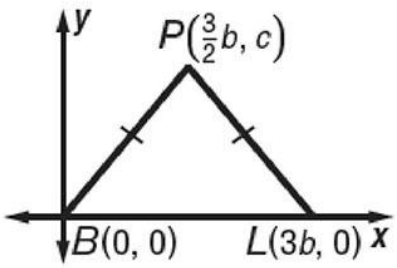
إذاً زاويين القاعدة متساويتين

قياس الزاوية الواحدة = 162÷ 2=81

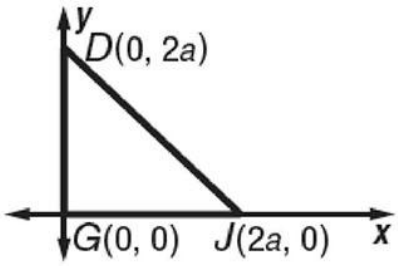
3-7 المثلثات والبرهان الاحداثي

مثل كلا من المثلثين الآتيين في المستوى الاحداثي، واكتب إحداثيات رؤوسه:

(1

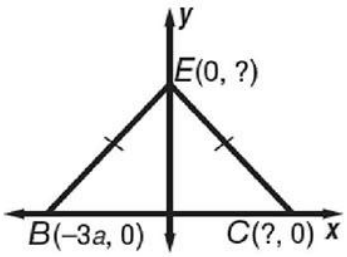


(2

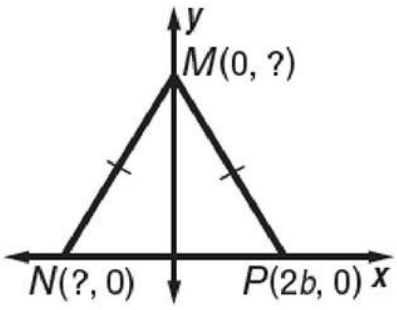


أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين:

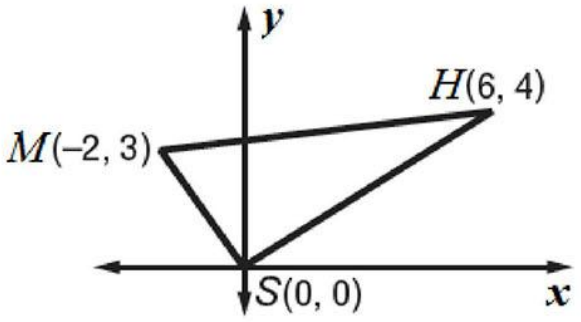
(3 $C(3a, 0), E(0, b)$



(4 $M(0, c), N(-2b, 0)$



متجهات: استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين 5,6:



5) $SH = \frac{4-0}{6-0} = \frac{2}{3}$ ،

$SM = \frac{3-0}{-2-0} = -\frac{3}{2}$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي

1- فان $SH \perp SM$

لذا فان ΔSHM قائم الزاوية

6) $HM = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$HM = \sqrt{(-2-6)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$HM = 8.1$

المسافة بين منزل كمال والمسجد 8.1 تقريباً

4-1 المنصفات في المثلث

أوجد قياس كل مما يأتي:

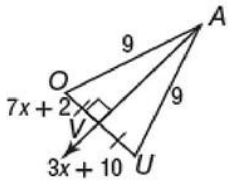
1) 7

من المعطيات $\overrightarrow{TJ}$ منصف لـ $\overline{LP}$

$\overline{TP} \cong \overline{TL}$ نظرية العمود المنصف

$TP = 7$

2) 16



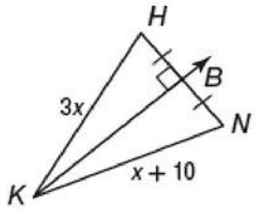
$7x + 2 = 3x + 10$

$4x = 8$

$x = 2$

$3(2) + 10 = 16$

3) 15



$3x = x + 10$

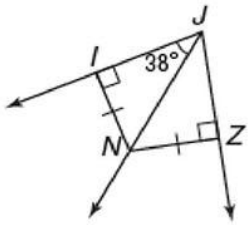
$2x = 10 +$

$x = 5$

$KN = x + 10 = 5 + 10$

$KN = 15$

4) 38°

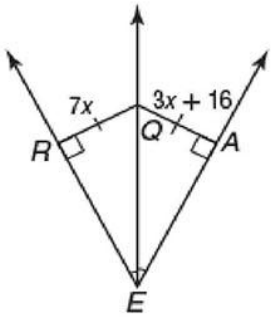


$\Delta NIJ \cong \Delta NZJ$ AAS

$\angle NJZ \cong NJI$

$m\angle NJZ = 38^\circ$

5) 28



$3x + 16 = 7x$

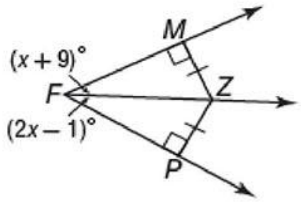
$4x = 16$

$x = 4$

$QA = 3x + 16 = 3(4) + 16$

$QA = 28$

6) $19°$



$\angle MFZ \cong \angle PFZ$ عكس نظرية منصف الزاوية

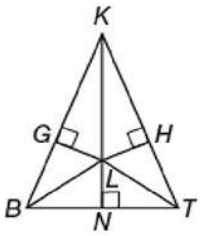
$$x+9=2x-1$$
$$x=10$$

$$m\angle MFZ = 10+9 = 19$$

اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاه في كل سؤال مما يأتي:

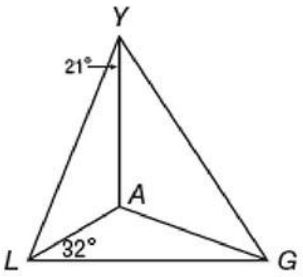
7) $\overline{BN} \cong \overline{NT}$

8) $\overline{BL} \cong \overline{KL} \cong \overline{LT}$



إذا كانت النقطة A مركز الدائرة الداخلية لـ LYG فاوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

9) $32°$



$\angle YLA \cong \angle GLA$ نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

$$m\angle YLA = 32^\circ$$

10) $37°$

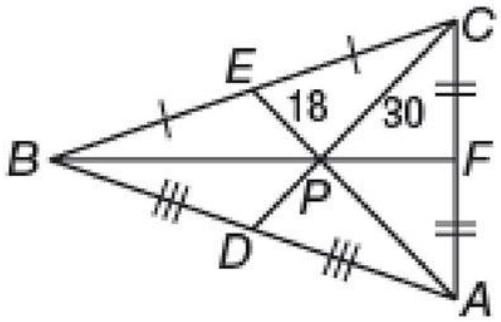
$$m\angle LYG = 2m\angle LYA = 42^\circ$$
$$m\angle YLG = 2m\angle GLA = 64^\circ$$
$$m\angle YGL = 180-(64+42) = 74^\circ$$
$$m\angle YGA = \frac{1}{2}(74) = 37^\circ$$

11) **هندسة:** يعين مركز الدائرة الداخلية لمثلث وهونقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

إذا كانت P مركز المثلث ، $ABC\ BF=39,\ CP=30,\ EP=18$

فأوجد طول كل مما يأتي:



(1 $DP=\frac{1}{2}PC=15$

(2 $FP=\frac{1}{3}FB=\frac{1}{3}(39)=13$

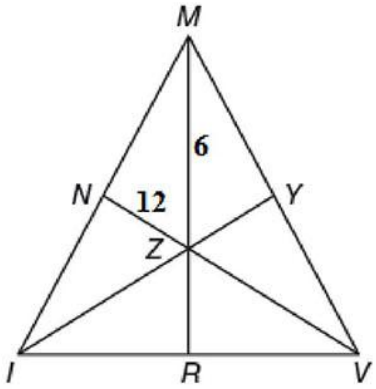
(3 $BP=\frac{2}{3}(39)=26$

(4 $CD=DP+PC=15+30=45$

(5 $PA=2EP=2\times18=36$

(6 $EA=EP+AP=36+18=54$

فاوجد طول كل مما يأتي:



(7 $ZR=\frac{1}{2}MZ=\frac{1}{2}(6)=3$

(8 $YZ=\frac{1}{3}YI=\frac{1}{3}(18)=6$

(9 $MR=MZ+ZR=6+3=9$

(10 $ZV=2NZ=2\times12=24$

(11 $NV=NZ+ZV=12+24=36$

(12 $IZ=\frac{2}{3}YI=\frac{2}{3}(18)=12$

13) هندسة إحداثية:

احداثيان مركز المثلث هي $\left(\frac{I_x+J_x+K_x}{3}\ ,\ \frac{I_y+J_y+K_y}{3}\right)$

$\left(\left(\frac{3+6+3}{3}\right),\left(\frac{1+3+5}{3}\right)\right)$

$(4\ ,\ 3)$

14) هندسة إحداثية:

إيجاد معادلة الارتفاع من U الى : $\overline{ST}$

ميل $\overline{ST}$ = = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $1=\frac{3}{3}$ اذن ميل العمودي = -1

$(y-y_1)=m(x-x_1)$

$y-6=-x+3$

$y=-x+9$

إيجاد معادلة الارتفاع من T الى : $\overline{SU}$

ميل $\overline{SU}$ = = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $2=\frac{6}{3}$ اذن ميل العمودي = -2

$(y-y_1)=m(x-x_1)$

$y-3=-2x+6$

$y=-2x+9$

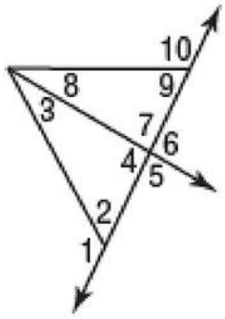
بحل المعادلتين لإيجاد تقاطعهما بالطرح

نقطة التقاطع $(0,9)$ و هي احداثي ملتقى ارتفاعات المثلث.

15) تمارين: يجب أن يعلق كل مثلث عند نقطة التقاء القطع المتوسطة

4-3 المتباينات في المثلث-

حدد الزاوية التي لها أكبر قياس في كل من الأسئلة الآتية بالشكل المجاور:



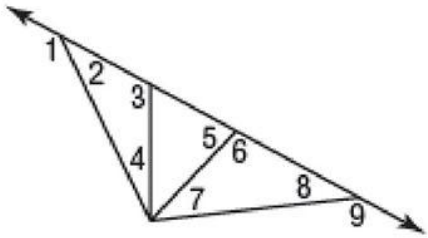
1) $\angle 1$ زاوية خارجة

2) $\angle 4$ زاوية خارجة

3) $\angle 7$ زاوية خارجة

4) $\angle 10$ زاوية خارجة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطي في كل من الأسئلة الآتية:



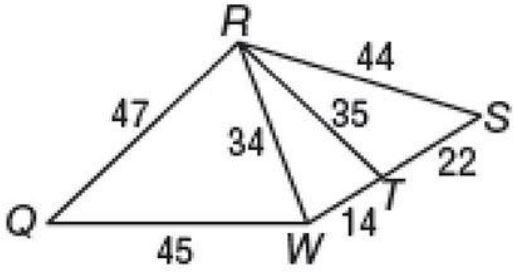
5) $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 7, \angle 8$

6) $\angle 5\ , \angle 7\ , \angle 8$

7) $\angle 1, \angle 3, \angle 5, \angle 9$

8) $\angle 6\ , \angle 9$

مستعينا بالشكل المجاور حدد العلاقة بين قياسي الزاويتين في كل من الأسئلة الآتية:



9) $\because RQ > QW$
$\therefore m\angle QRW < m\angle RWQ$

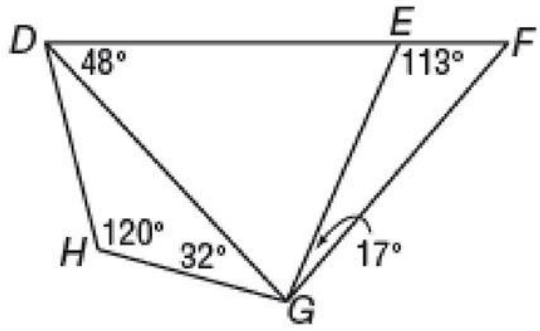
10) $\because RW < TR$
$\therefore m\angle RTW < m\angle TWR$

11) $\because RT > ST$
$\therefore m\angle RST > m\angle TRS$

12) $\because WR < QW$
$\therefore m\angle WQR < m\angle QRW$

مستعينا بالشكل المجاور حدد العلاقة بين طولي كل قطعتين مستقيمتين في كل من الأسئلة الآتية:

(13



$\because m\angle GDH = 180 - (120 + 32) = 28^\circ$
$\because \underline{m\angle DGH > m\angle GDH}$
$\therefore \overline{DH} > \overline{GH}$

(14

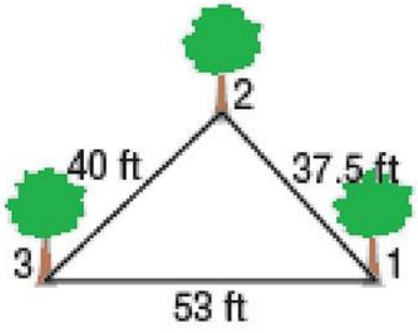
$m\angle DGE = 113 - 48 = 65^\circ$
$m\angle DEG = 180 - 113 = 67^\circ$
$\because \underline{m\angle DEG > m\angle DGE}$
$\therefore \overline{DE} < \overline{DG}$

(15

$m\angle EFG = 180 - (133 + 17) = 30^\circ$
$\because \underline{m\angle EFG < m\angle FEG}$
$\therefore \overline{EG} < \overline{FG}$

(16

$m\angle EGD = 113 - 48 = 65^\circ$
$\because \underline{m\angle EGD > m\angle EDG}$
$\therefore \overline{DE} > \overline{EG}$



17) حديقة:

∵ 53 > 40 > 37.5

∴ الشجرة2 تقابل الزاوية الأكبر

4-4 البرهان غير المباشر

اكتب الافتراض الذي نبدأ به برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

1) BD لا تنصف $\angle ABC$

2) $RT \neq TS$

اكتب برهانا غير مباشر لكل من العبارتين الآتيتين:

3) الخطوة الأولى: نفرض أن $x \leq 3$

الخطوة الثانية: إذا كانت $x \leq 3$ ، فان $-4x \geq -12$ يعني ان $-4x + 2 \geq -10$ ، الذي يتعارض مع المتباينة المعطاة

الخطوة الثالثة: حيث افتراضأن $x \leq 3$ يؤديإلىالتناقض،يجبأنيكونصحيحاأن $x > 3$

4) الخطوةالأولى: نفرض أن $a \not\parallel b$

الخطوةالثانية: إذاكان $a \not\parallel b$ ،الزواياالداخليةالمتحالفة $\angle 3$,$\angle 2$ هيمتكاملتان.وبالتالي هذايتناقضالمعطيات ان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

الخطوةالثالثة: حيثالافتراضيؤديإلىالتناقض،اذن الفرض $a \not\parallel b$ غير صحيح.
وبالتالي،يجبأنيكون $a \parallel b$ صحيح

5) فيزياء: افترض أن درجة الحرارة كانت 20C عندما سمع عبدالله صوت الصفارة و بما أن صوت الصفارة يستغرق أكثر من 5s حتى يصل أذنه، وهذا يعني بتناقض معطيات المسألة ولذا يكون افتراض أن درجة الحرارة كانت 20C خطأ وهذه فان درجة الحرارة لم تكن 20C عندما سمع صوت صفارة الإنذار.

4-5 متباينة المثلث

حدد ما إذا كانت كل من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي وان لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب:

1) نعم

2) لا، لان $8+9=17$

3) نعم

4) لا، لان $23+26<50$

5) نعم

6) نعم

7) لا، لان $0.7+1.4=2.1$

8) نعم

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولا ضلعين من أضلاعه في كل مما يأتي:

9) $13\text{ ft.} < n < 25\text{ ft.}$

10) $22\text{ km} < n < 36\text{ km}$

11) $14\text{ in.} < n < 40\text{ in.}$

12) $5\text{ ft.} < n < 41\text{ ft.}$

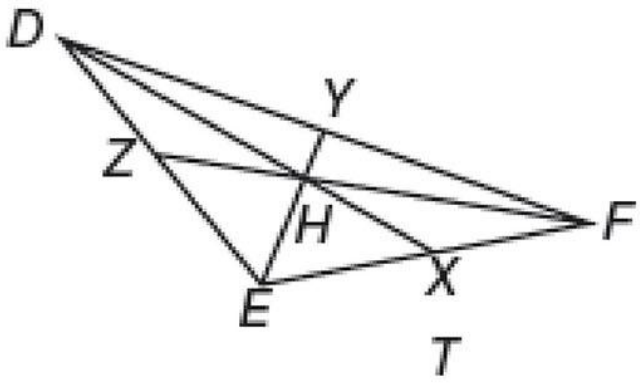
13) $13\text{ yd.} < n < 63\text{ yd.}$

14) $6\text{ cm.} < n < 70\text{ cm.}$

15) $36\text{ m} < n < 48\text{ m}$

16) $47\text{ in.} < n < 61\text{ in.}$

17) برهان:



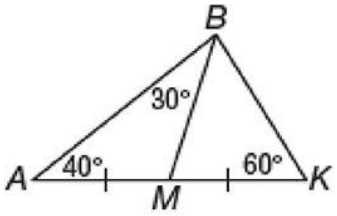
العبارات	المبررات
H مركز ΔEDF	معطي
$\overline{EY}$ قطعة متوسطة	تعريف مركز المثلث
Y منتصف $\overline{DF}$	تعريف القطعة المتوسطة
$DY=FY$	تعريف نقطة المنتصف
$EY+DY > DE$	نظرية متباينة المثلث
$EY+FY > DE$	بالتعويض

18) سياج: 3 نماذج

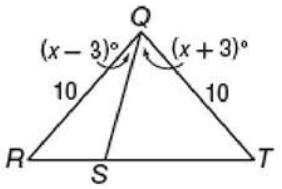
4-6 المتباينات في مثلثين

قارن بين كل قياسين في الأسئلة الآتية:

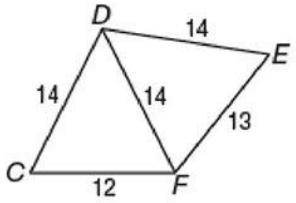
1) $AB > BR$



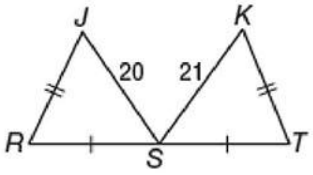
2) $ST > SR$



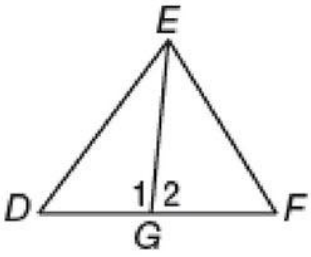
3) $m\angle CDF > m\angle EDF$



4) $m\angle R < m\angle T$



5) البرهان:



العبارات	المبررات
G منتصف $\overline{DF}$	معطي
$\overline{DG} \cong \overline{FG}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{EG} \cong \overline{EG}$	خاصية الانعكاس
$m\angle 1 > m\angle 2$	معطي
$ED > EF$	نظرية المتباينة SAS

6) أدوات: مثال على المتباينة SAS.