المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ٢

التعليم الثانوي
(نظام المقررات)

(البرنامج المشترك)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٢ - ٢٠٢٠

ح وزارة التعليم ، ١٤٣٨هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٢ – البرنامج المشترك – نظام المقررات – كتاب الطالب.
وزارة التعليم.– الرياض ، ١٤٣٧هـ
٢٤٨ ص ؛ ٢١ x ٢٧,٥سم
ردمك : ٥ – ٣٤٨ – ٥٠٨ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١– الرياضيات – كتب دراسية   ٢– التعليم الثانوي – السعودية – كتب دراسية   أ. العنوان
ديوي ٥١٠,٧١٢   ١٠٣٥٧/ ١٤٣٧

رقم الإيداع : ١٠٣٥٧/ ١٤٣٧
ردمك : ٥ - ٣٤٨ - ٥٠٨ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حول الغلاف

تسقط أشعة الشمس المتوازية على الطبق الشمسي فترتد مكوِّنة زوايا متناظرة وأخرى متحالفة.
تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 1 الأشكال الرباعية

الفصل 2 التشابه

الفهرس

الفصل 3 التحويلات الهندسية و التماثل

الفصل 4 الدائرة

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات هندسية، تشمل ما يأتي:

- **المنطق الرياضي** واستعماله في البراهين الهندسية والجبرية.
- العلاقات بين **الزوايا والمستقيمات**.
- العلاقات في **المثلث**، وتطابق المثلثات، وتشابهها.
- **التحويلات الهندسية** والتماثل في الأشكال الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- خواص **الأشكال الرباعية** ونظريات **الدائرة**.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الهندسية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **اربط** بين المعنى اللغوي والمعنى الرياضي للمفردة، من خلال فقرة **ربط المفردات**
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **ارجع** إلى **الصيغ والرموز** في آخر الكتاب لتعرف الرموز التي تعلمتها في المرحلة المتوسطة وما يقابلها في المرحلة الثانوية، ولتعرف أيضًا أهم الصيغ والرموز التي وردت في هذا الكتاب.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس الرئيسة في **دليل الدراسة والمراجعة** . أو بعد مراجعة ما دوَّنته من أفكار في **المطويات**
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها .
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفصل

1

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals

فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

والآن:

- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

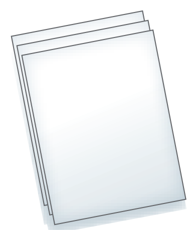
لماذا؟

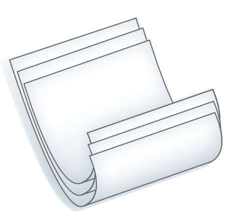
أدوات رياضية:
تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

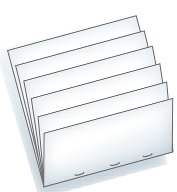
المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعملْ هذهِ المطويَّةَ لتساعدَكَ على تنظيمِ معلوماتِكَ حول الفصل 1 . ابدأْ بثلاثِ أوراقِ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراق بعضها فوق بعض بحيث تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm
2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكونَ لحوافها الظاهرة العرض نفسه.
3. ثبِّتِ الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.
4. أُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروس، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.







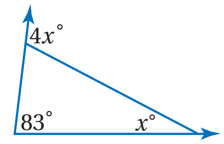
التهيئة للفصل 1

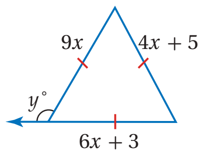
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

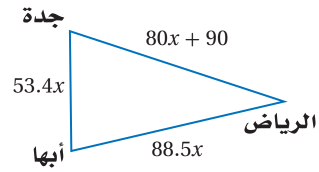
اختبار سريع

أوجد قيم x, y في كل مما يأتي مقرَّبًا إلى أقرب عُشر:

1)


2)


3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7),$ $D(-3, 4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يأتي:

8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$

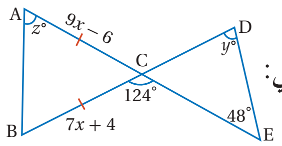
9) $R(2, 5), S(8, 4)$

10) **مسافات:** وقف شخص على النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد (x, y, z) في الشكل الآتي:



$AC = BC$	معطى
$9x - 6 = 7x + 4$	بالتعويض
$2x = 10$	بالطرح
$x = 5$	بالتبسيط
$124^\circ = y^\circ + 48^\circ$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$(y) = 76^\circ$	بالتبسيط
$124^\circ = z^\circ + z^\circ$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$124^\circ = 2z^\circ$	بالجمع
$z^\circ = 62^\circ$	بالتبسيط

مثال 2

إذا كان $A(-2, 5), B(4, 17), C(0, 1), D(8, -3)$ ، فحدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{17-5}{4-(-2)} = \frac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{-3-1}{8-0} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فهما غير متوازيين.

$2(-\frac{1}{2}) = -1$ حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1، فهما متعامدان.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(2, -1), K(7, 1)$ ، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(7-2)^2 + (1-(-1))^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{29}$ بالتبسيط

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (4.5, 0)$

1-1

زوايا المضلع
Angles of Polygon

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

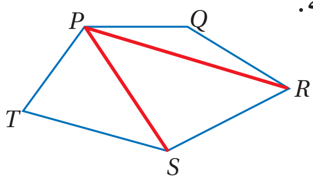
المفردات:

القطر
diagonal

لماذا؟

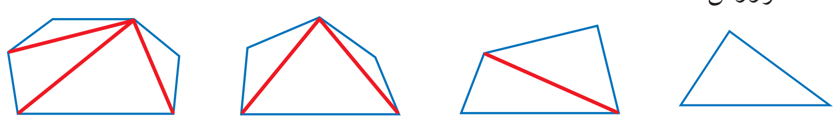
تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكِّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكِّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع:



قطر المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه.
رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P، هما: R, S؛
لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P، هما: $\overline{PR}, \overline{PS}$.
لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث °180، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

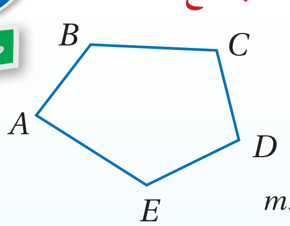
المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ\ \mathbf{(1)} = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ\ \mathbf{(2)} = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ\ \mathbf{(3)} = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ\ \mathbf{(4)} = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ\ \mathbf{(n-2)}$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية:

نظرية 1.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n-2) \cdot 180^\circ$.



مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$$

ستبرهن نظرية 1.1 في السؤال 38

مراجعة المفردات

المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه.

مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.

يمكنك استعمال النظرية 1.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

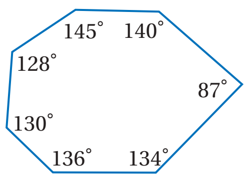
a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية1.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ$ $\quad n = 7$

$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ$ $\quad$ بالتبسيط

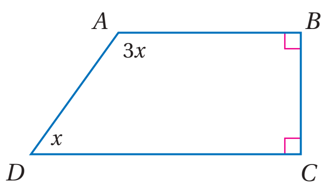
إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.



ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

$128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ$ ✓

b) جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.



الخطوة 1: أوجد قيمة (x).

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$.

$360^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$ $\quad$ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة

$360^\circ = 3x + 90^\circ + 90^\circ + x$ $\quad$ بالتعويض

$360^\circ = 4x + 180^\circ$ $\quad$ بتجميع الحدود المتشابهة

$180^\circ = 4x$ $\quad$ بطرح 180° من كلا الطرفين

$45^\circ = x$ $\quad$ بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle D = x = 45^\circ$

$m\angle B = 90^\circ$ $\quad$ $m\angle C = 90^\circ$

$m\angle A = 3x = 3(45^\circ) = 135^\circ$

اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

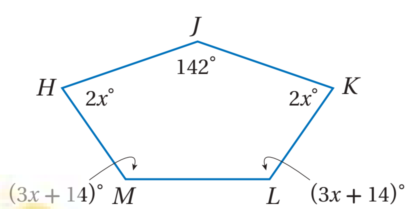
$90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ✓

تحقق من فهمك

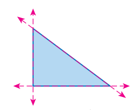
1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

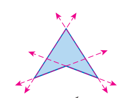
1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من 180°، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.


مضلع محدب


مضلع مقعر

إرشادات للدراسة

المضلع: عند ذكر كلمة مضلع في هذا الفصل فإننا نعني المضلع المحدّب.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم:
هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

تذكّر أن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد قياس الزاوية الداخلية لأي مضلع منتظم.

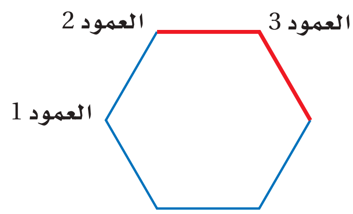
مثال 2 من واقع الحياة — قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

مظلة: في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم: **المعطيات:** منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

ارسم شكلًا يمثّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $n = 6$

$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ بالتبسيط

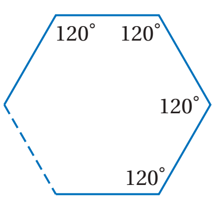
ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\dfrac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \dfrac{720^\circ}{6}$ بالتعويض

$= 120^\circ$ بالقسمة

إذن قياس الزاوية المتكوِّنة عند كل ركن يساوي 120°.

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة 120°. سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓



تحقق من فهمك

2A) **سجاد:** أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

2B) **نوافير:** تزيّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

يمكنك أيضًا استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لإيجاد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا عُلم قياس زاوية داخلية له.

مثال 3 إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $135°$، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n - 2) \cdot 180$.

$135°n = (n - 2) \cdot 180°$	كتابة معادلة
$135°n = 180°n - 360°$	خاصية التوزيع
$-45°n = -360°$	بطرح $180n$ من كلا الطرفين
$n = 8$	بقسمة كلا الطرفين على -45

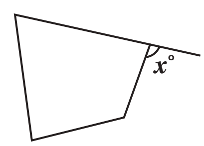
إذن للمضلع 8 أضلاع.

تحقق من فهمك

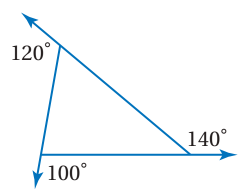
3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $144°$، فأوجد عدد أضلاعه.

مراجعة المفردات

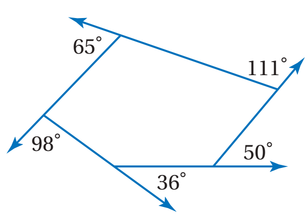
الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



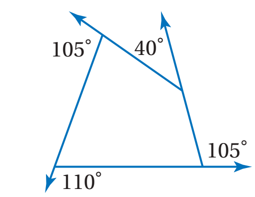
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجيّة؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$120° + 100° + 140° = 360°$



$65° + 98° + 36° + 50° + 111° = 360°$



$105° + 110° + 105° + 40° = 360°$

لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي $360°$. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

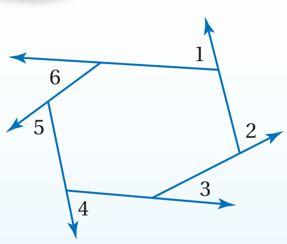
نظرية 1.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

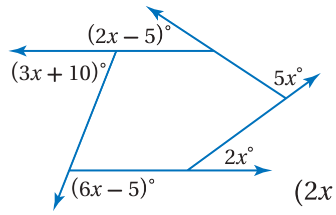
مثال:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$$



ستبرهن نظرية 1.2 في السؤال 39

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع



a) **جبر:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$
$$(2x+5x+2x+6x+3x)^\circ + [-5+(-5)+10]^\circ = 360^\circ$$
$$18x^\circ = 360^\circ$$
$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.

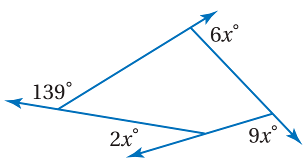
تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x، ثم اكتب معادلة وحلّها.

$9x = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$x = 40^\circ$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40°.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

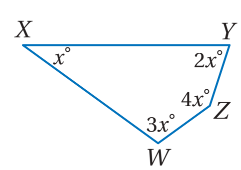
تأكد

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

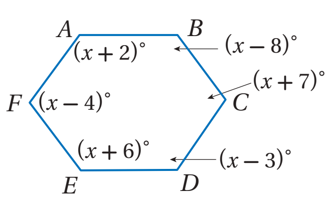
1) العشاري **2)** الخماسي

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)

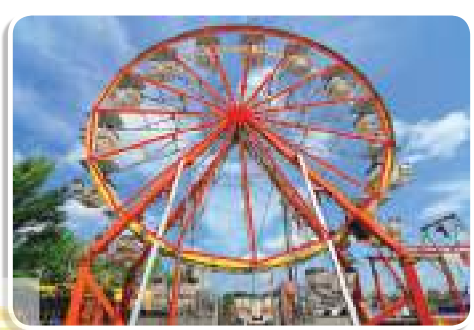


4)



المثال 2 **5)** **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.

أوجد قياس الزاوية الداخليّة له.

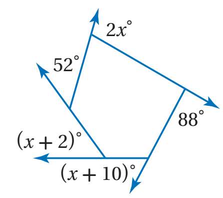


المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

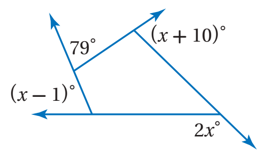
6) 150° **7)** 170°

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

8)



9)



أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي

11) ثُماني

تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

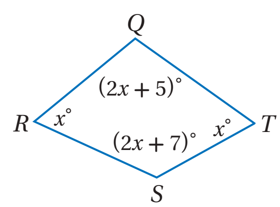
13) ذو 20 ضلعًا

14) ذو 29 ضلعًا

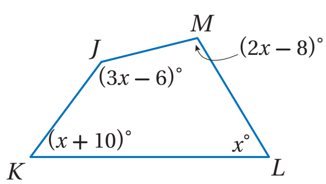
15) ذو 32 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

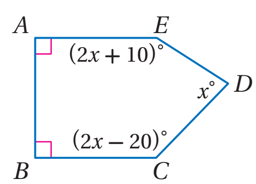
16)



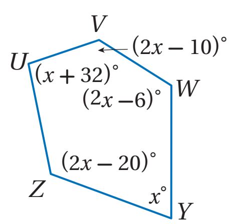
17)



18)



19)



20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

21) ذو 12 ضلعاً

22) الخماسي

23) العشاري

24) التُّساعي

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) $60°$

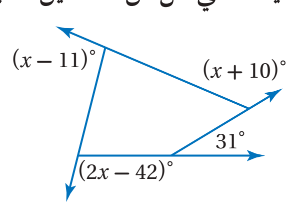
26) $90°$

27) $120°$

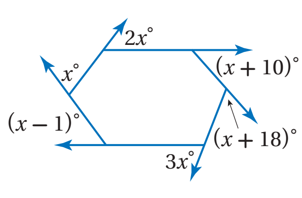
28) $156°$

المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29)



30)



تاريخ الرياضيات

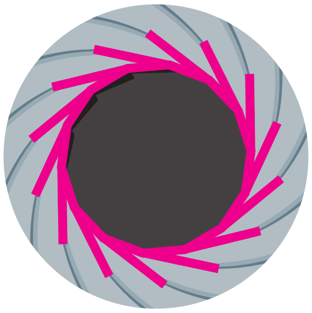
أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع 236 - 318 هـ

مهندس وعالم بالحساب، عرف باسم «أبي كامل الحاسب»، وعاش في القرن الثالث الهجري، له رسالة في «المضلع ذي الزوايا الخمس وذي الزوايا العشر».

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري **32)** الخماسي **33)** السداسي **34)** ذو 15 ضلعًا

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 **37)** 13

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي $1080°$، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

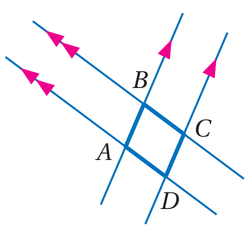
جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$(x+5)°, (x+10)°, (x+20)°, (x+30)°, (x+35)°, (x+40)°, (x+60)°, (x+70)°, (x+80)°, (x+90)°$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x°, (4x+13)°, (x+9)°, (2x-8)°, (4x-1)°$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.

b) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$		$m\angle B$		$m\angle C$		$m\angle D$	
	AB		BC		CD		DA	
$FGHJ$	$m\angle F$		$m\angle G$		$m\angle H$		$m\angle J$	
	FG		GH		HJ		JF	
$QRST$	$m\angle Q$		$m\angle R$		$m\angle S$		$m\angle T$	
	QR		RS		ST		TQ	

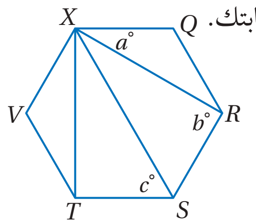
c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

d) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. "فهل أيٌّ منهما ادعاؤها صحيح"؟ وضّح تبريرك.



44) **تحدٍّ:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.

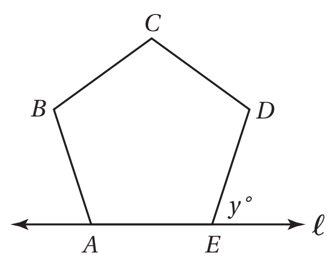
45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

47) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على اختبار

48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $(\angle y)$؟



49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع

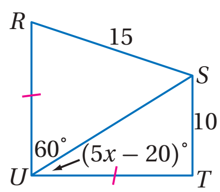
B خماسي

C سداسي

D ثماني

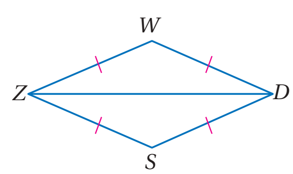
مراجعة تراكمية

50) **جبر:** اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـِ x (مهارة سابقة)

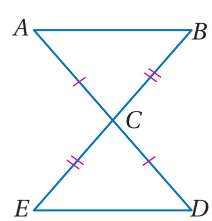


بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق: (مهارة سابقة)

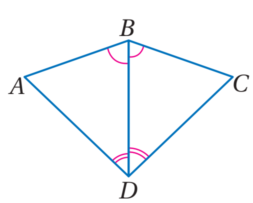
51)



52)

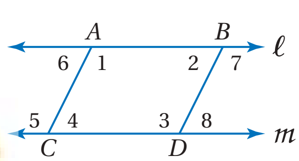


53)



استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ ، $\ell \parallel m$ ، حدِّد جميع أزواج الزوايا التي تصنف وفقًا لما يلي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

55) زاويتان متحالفتان.

معمل الجداول الإلكترونية
زوايا المضلع
Angles of Polygon

من الممكن إيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية بالإضافة إلى مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وذلك باستعمال برنامج الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمّم جدولًا إلكترونيًّا باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب عناوين للأعمدة كما في الجدول أدناه.
- أدخل الأرقام 10–3 في العمود الأول بدءًا من الخلية A2.
- عدد المثلثات في كل مضلع أقل من عدد أضلاعه بـ 2. اكتب صيغة في الخلية B2 لطرح 2 من كل عدد في الخلية A2 وذلك بوضع المؤشر في الخلية B2 وكتابة $\boxed{=A2-2}$ ثم ضغط enter.
- اكتب صيغة في الخلية C2 لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخليّة. تذكّر أن صيغة مجموع قياسات زوايا مضلع هي $S=(n-2)\cdot180°$، وذلك بوضع المؤشر في الخلية C2 وكتابة $\boxed{=B2*180}$ ثم ضغط enter.
- استمر في كتابة صيغ لحساب القيم المشار إليها في الجدول، ثم اسحب هذه الصيغ على القيم حتّى الصف 9. سيظهر الجدول في النهاية على النحو الآتي:

المضلعات والزوايا

	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

تمارين ومسائل:

1) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.
2) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.
3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟
4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

استعمل جدولًا إلكترونيًّا لحل الأسئلة الآتية:

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟
6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.
7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر.
8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية °0، فأوجد قياس الزاوية الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

1-2

متوازي الأضلاع
Parallelogram

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات الرباعية .

(مهارة سابقة)

والآن:

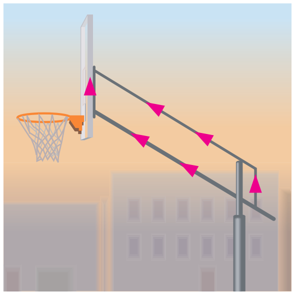
- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبِّقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبِّقها.

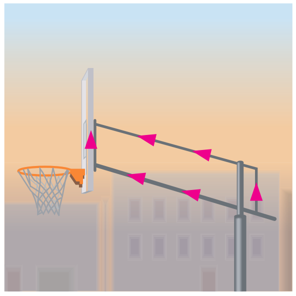
المفردات:

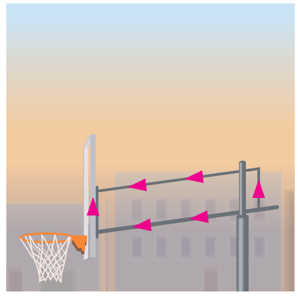
متوازي الأضلاع
parallelogram

لماذا؟

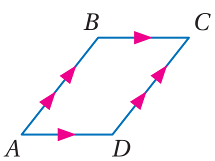
يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنّه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكِّله الأذرع متوازيين.







أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويُرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز $\square$.
ففي $\square ABCD$ المبين جانبًا $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ بحسب التعريف.



$\square ABCD$

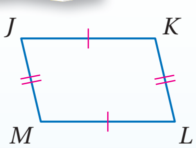
تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

نظريات — خصائص متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

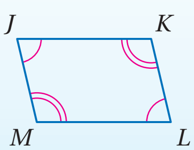
1.3 **كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.**

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



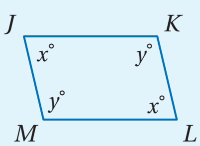
1.4 **كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.**

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$



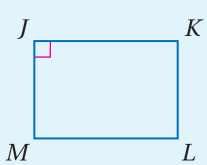
1.5 **كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.**

مثال: $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$



1.6 **إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.**

مثال: في $\square JKLM$ ، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ : $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.

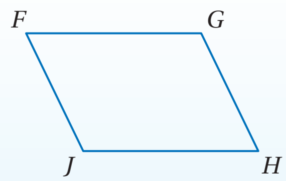


سوف تبرهن النظريات 1.6 ,1.5 ,1.3 في الأسئلة 5 ,25 ,27 على الترتيب

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال: تكتب النظريات بمصطلحات عامّة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.

برهان — نظريّة 1.4



اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريّة **1.4**.

المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

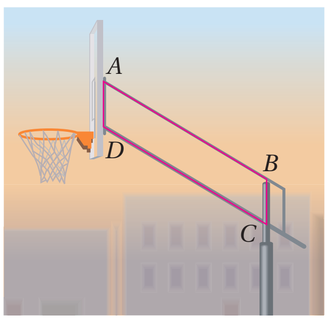
البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\square FGHJ$	(1 معطى.
(2 $\overline{FG} \parallel \overline{JH}, \overline{FJ} \parallel \overline{GH}$	(2 تعريف متوازي الأضلاع.
(3 $\angle F , \angle J$ متكاملتان. $\angle J , \angle H$ متكاملتان. $\angle H , \angle G$ متكاملتان.	(3 إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
(4 $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$	(4 الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص متوازي الأضلاع

الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي $94\,\text{ft} \times 50\,\text{ft}$، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض $10\,\text{ft}$.



كرة سلّة: في $\square ABCD$ ، إذا كان $AB = 2.5\,\text{ft}, m\angle A = 55°$ ، $BC = 1\,\text{ft}$، فأوجد كلًّا مما يأتي، وبرِّر إجابتك.

a) DC

$\overline{DC} \cong \overline{AB}$ — كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان

$DC = AB$ — تعريف تطابق القطع المستقيمة

$= 2.5\,\text{ft}$ — بالتعويض

b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180°$ — كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان

$m\angle B + 55° = 180°$ — بالتعويض

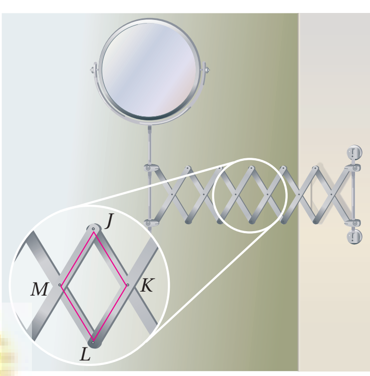
$m\angle B = 125°$ — بطرح $55°$ من كلا الطرفين

c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$ — كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان

$= 55°$ — بالتعويض

تحقق من فهمك



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47°, MJ = 8\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK **B)** $m\angle L$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

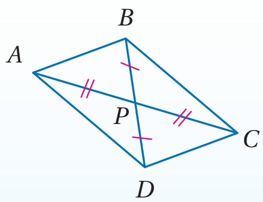
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطرا متوازي الأضلاع

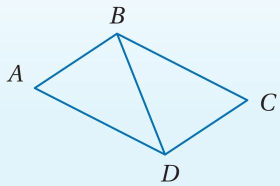
1.7 **قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.**

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



1.8 **قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.**

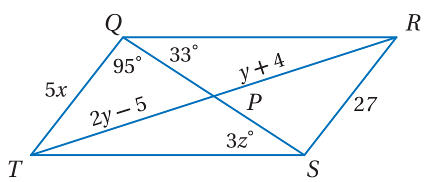
مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



سوف تبرهن النظريتين 1.7, 1.8 في السؤالين 26, 28 على الترتيب

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر

جبر: إذا كان ***QRST*** متوازي أضلاع،
فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:



a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

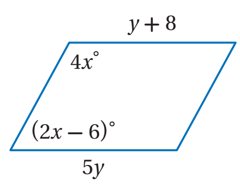
c) z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33°$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

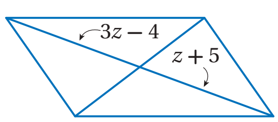
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



2B)



يمكنك استعمال النظرية 1.7 لتحديد إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مثال 3 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية : أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(2, -3)$, $(-2, 4)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (0, 0.5)$$ بالتبسيط

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

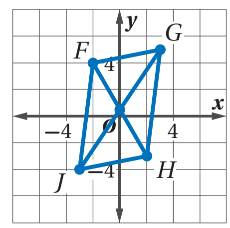
$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5) \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثيّة :** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

إرشادات للدراسة

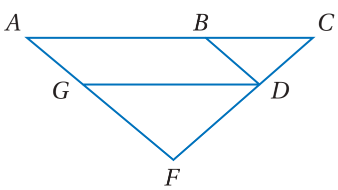
التحقق من الإجابة : في المثال 3 ، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.



يمكنك استعمال خصائص متوازي الأضلاع وأقطاره لكتابة براهين.

مثال 4 استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين

اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\square ABDG, \overline{AF} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

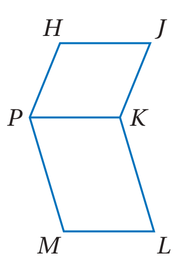
من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle BDG \cong \angle A$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $\square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$



تأكد

المثال 1

1) **مِلاحة:** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين، يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار، ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتان والذراعان الواصلتان بينهما $\square MNPQ$.

a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

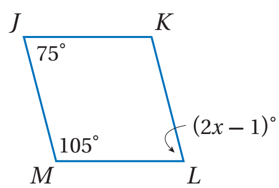
b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

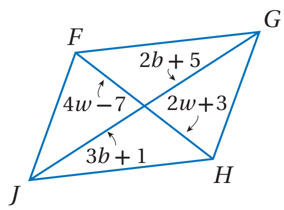
المثال 2

جبر: أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2)



3)



المثال 3

4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

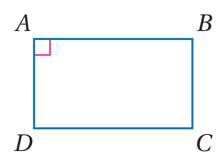
المثال 4

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

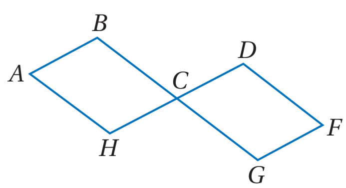
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 1.6)



6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

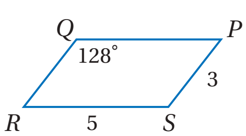
المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



تدرب وحل المسائل

المثال 1

استعمل $\square PQRS$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



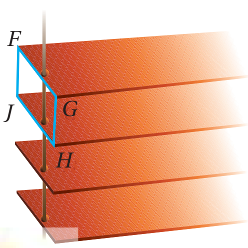
7) $m\angle R$

8) QR

9) QP

10) $m\angle S$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}\text{ in}, FG = 1\text{ in}, m\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH

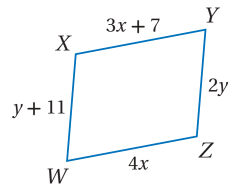
b) GH

c) $m\angle JFG$

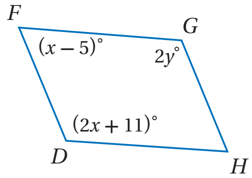
d) $m\angle FJH$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

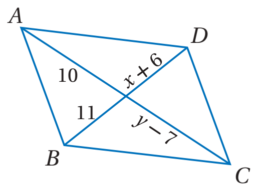
(12



(13



(14



المثال 3 **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

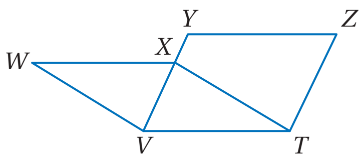
(15 $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$

(16 $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

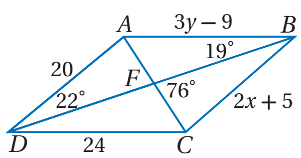
المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :

(17 **المعطيات:** $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$



جبر: استعمل $\square ABCD$ المبيّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



(18 x

(19 y

(20 $m\angle AFB$

(21 $m\angle DAC$

(22 $m\angle ACD$

(23 $m\angle DAB$

(24 **هندسة إحداثيّة:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وبرّر إجابتك.

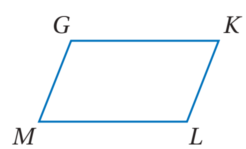
برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

(25 برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: اثبات أن كل زاويتين في الأزواج التالية متكاملتان $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$.

(النظرية 1.5)

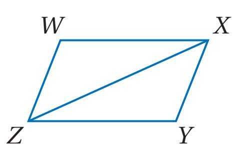


(26 برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 1.8)

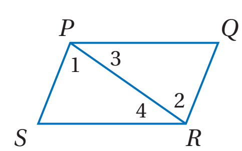


(27 برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 1.3)

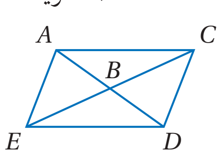


(28 برهانًا حرًّا.

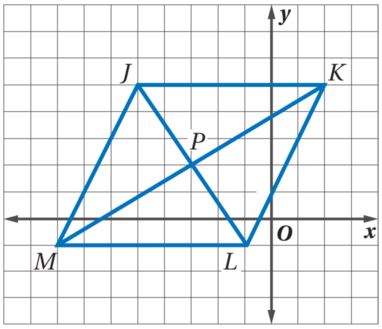
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{EC}$ و $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 1.7)



29) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:

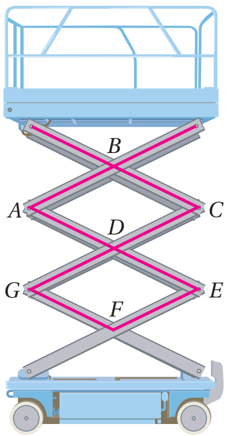


a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان كل ضلعين متتاليين متعامدين أم لا. وضّح إجابتك.

30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $ABCD$, $GDEF$ متوازيا أضلاع متطابقان.



a) حدِّد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

b) حدِّد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

c) حدِّد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

الربط مع الحياة

توفر الرافعات المقصيّة مساحات عمل على ارتفاعات مختلفة تصل إلى $100\,m$.

31) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.

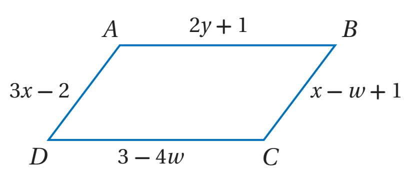
b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
$ABCD$			
$MNOP$			
$WXYZ$			

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

مسائل مهارات التفكير العليا

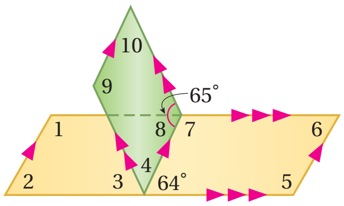
32) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي $22\,in$، فأوجد AB .



33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

34) **إجابة مفتوحة:** أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.

35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$, $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وبرّر إجابتك.



36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

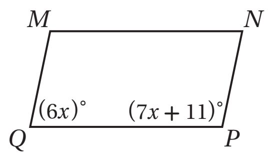
تدريب على اختبار

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $3x + 42$, $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟

A $13, 167$ **B** $58.5, 31.5$

C $39, 141$ **D** $81, 99$

38) إذا كان $QPNM$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

39) 108° 40) 140° 41) 147.3°

42) 160° 43) 135° 44) 176.4°

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

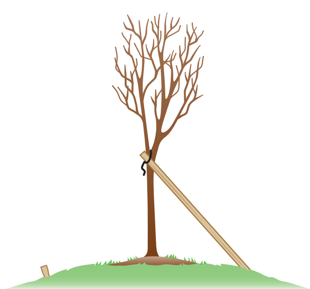
45) $y = -x + 6$
$x + y = 20$

46) $y - 7x = 6$
$7y + x = 8$

47) $3x + 4y = 12$
$6x + 2y = 6$

48) $2x + 5y = -1$
$10y = -4x - 20$

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$ 51) $\overline{YW}$ 52) $\overline{ZW}$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-3 تمييز متوازي الأضلاع
Distinguishing Parallelogram

فيما سبق:

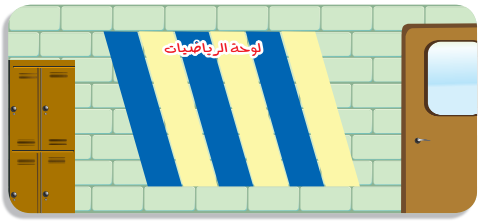
درستُ خصائص متوازي الأضلاع وطبّقتها.

(الدرس 2-1)

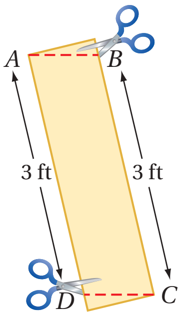
والآن:

- أتعرّف الشروط التي تؤكد أنّ شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع وأطبّقها.
- أبرهن على أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

لماذا؟



قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها: كيف قصصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين؟



أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريحة متوازيان، فإننا نحتاج فقط التأكد من أن لهما الطول نفسه عند قص الضلعين العلوي والسفلي للشريحة حتى نضمن أن الشرائح سوف تشكل متوازيات أضلاع.

شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

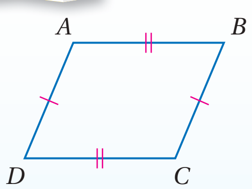
نظريات

شروط متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

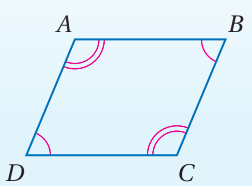
1.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



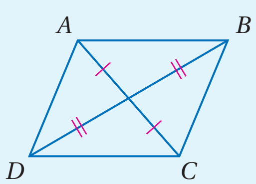
1.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$،
فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



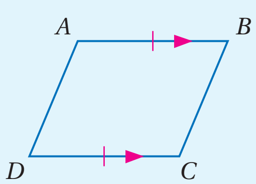
1.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



1.12 في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

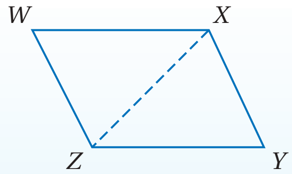
مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$،
فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



سوف تبرهن النظريتين 1.10, 1.11 في السؤالين 29, 31 على الترتيب، وتبرهن النظرية 1.12 في مثال 5

برهان نظريّة 1.9

اكتب برهاناً حرًّا للنظريّة 1.9



المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}\,,\, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$

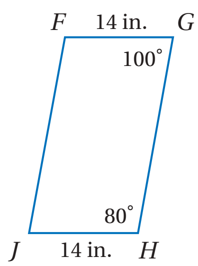
المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

البرهان:

ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{ZX}$ (قطر $\square WXYZ$)لتشكيل $\triangle ZWX\,,\, \triangle XYZ$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}\,,\, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YZX,\ \angle WZX \cong \angle YXZ$. وهذا يعني أنّ $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}\,,\, \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

مثال 1 تحديد متوازي الأضلاع

حدد ما إذا كانت المعطيات على الشكل الرباعي المجاور كافية ليكون متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.



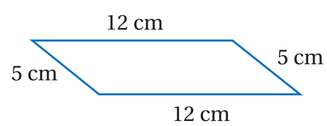
الضلعان المتقابلان $\overline{FG}\,,\, \overline{JH}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول.

وبما أن $\angle FGH\,,\, \angle GHJ$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

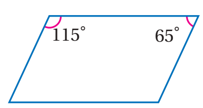
إذن فمن النظرية 1.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

(1A



(1B

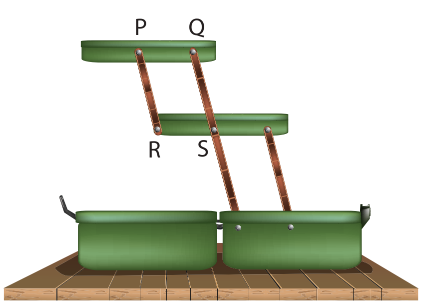


يمكنك استعمال شروط متوازي الأضلاع لإثبات علاقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات

صندوق الأدوات: **في الشكل المجاور،**

إذا كان $PQ = RS\,,\, PR = QS$، فبيِّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع .



بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 1.9.

إذن $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ؛ لذا وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.

الربط مع الحياة

يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهِّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.

تحقق من فهمك

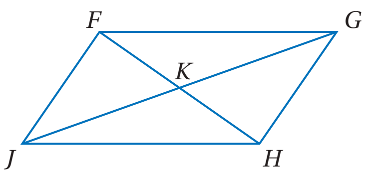
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريحة متوازيين.

تنبيه !

متوازي الأضلاع: في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1 مثلًا، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

يمكنك استعمال الجبر مع شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

مثال 3 استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة



في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1, KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2, KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

بناءً على النظرية 1.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$ ؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

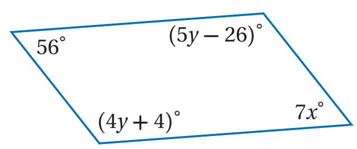
$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $x = 4, y = 2.5$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

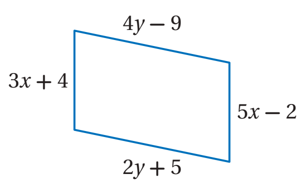
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



(3B



تعرفت شروط متوازي الأضلاع، وفيما يأتي ملخّص يوضح كيفيّة استعمال هذه الشروط لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثِّل متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم إثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثِّل متوازي أضلاع

أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقّق أيًّا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)

2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 1.9)

3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 1.10)

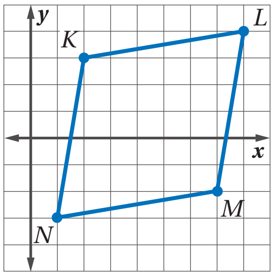
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 1.11)

5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 1.12)

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3), L(8, 4), M(7, -2), N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$, $\overline{LM} \parallel \overline{KN}$.
لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تحقق من فهمك

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة.

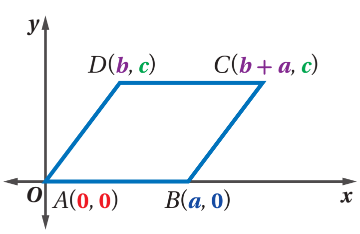
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

درست سابقًا، أنّه يمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس المثلثات بمتغيرات. ثم استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لكتابة براهين إحداثيّة للنظريات. ويمكن عمل الشيء نفسه مع الأشكال الرباعيّة.

مثال 5 متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية :

في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، وبفرض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، يكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

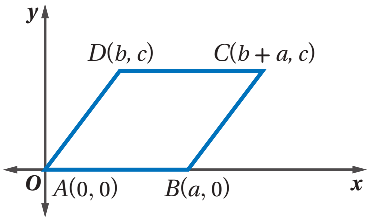
إرشادات للدراسة

صيغة نقطة المنتصف:
لبيان أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

مراجعة المفردات

البرهان الإحداثي:
هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

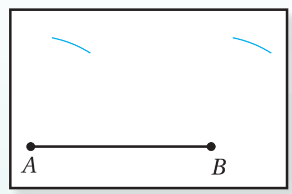
تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596م – 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي . وقيل إنّه فكّر أولًا بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.

إنشاءات هندسية

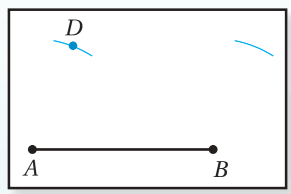
رسم متوازي أضلاع عُلم طولا ضلعين متتاليين فيه.

الخطوة 1:



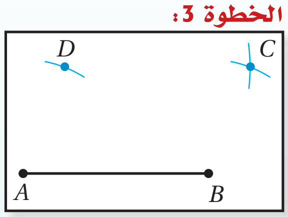
استعمل المسطرة لرسم $\overline{AB}$. ثم افتح الفرجار، وثبّته عند النقطة A، وارسم قوسًا فوقها. ثبّت الفرجار عند النقطة B، وبفتحة الفرجار نفسها ارسم قوسًا فوق B.

الخطوة 2:



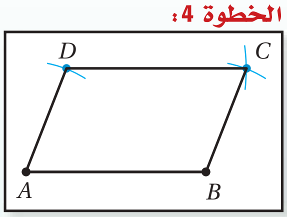
اختر نقطة على القوس الذي فوق A وسمِّها D.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة مساوية لِـ $\overline{AB}$، وثبّته عند النقطة D وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B، سمِّ نقطة التقاطع C.

الخطوة 4:

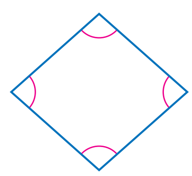


استعمل حافة المسطرة لرسم $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}$.

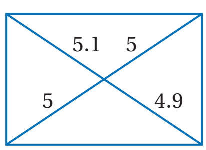
تأكـد

المثال 1 حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

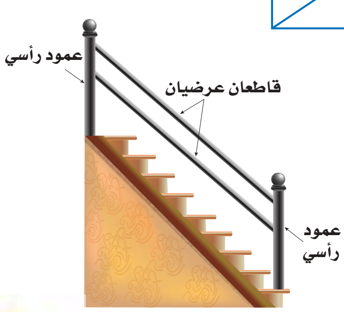
(1



(2

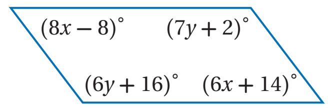


المثال 2 (3 **نجارة:** صنع نجار درابزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.

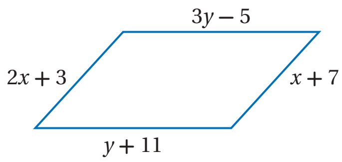


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4)



5)



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

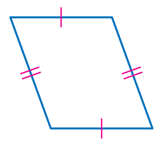
7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

المثال 5 8) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

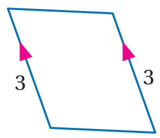
تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل مما يأتي كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

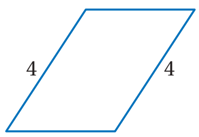
9)



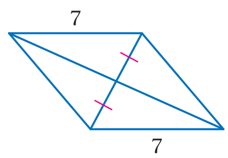
10)



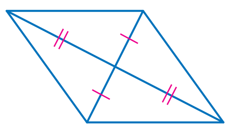
11)



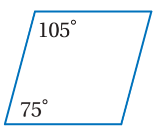
12)



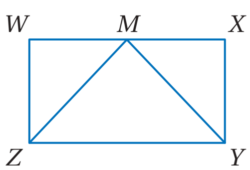
13)



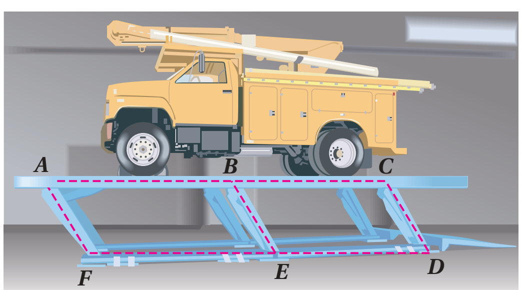
14)



المثال 2 15) **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

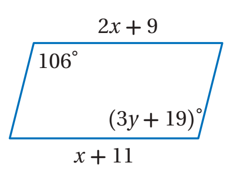


16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.

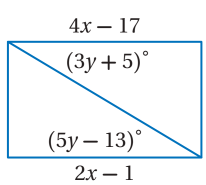


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

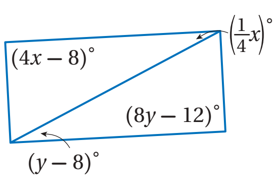
17)



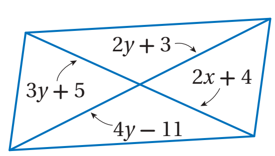
18)



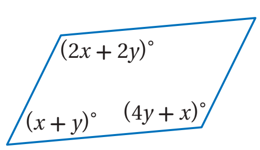
19)



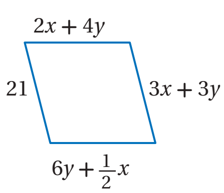
20)



21)



22)



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$ ، صيغة الميل.

26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

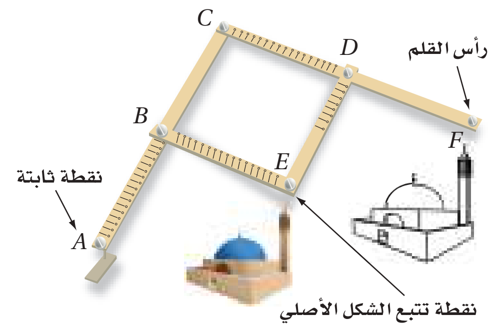
المثال 5

27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.10.

30) **المِنْسَاخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ بالنسبة للشكل الأصلي هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\text{in}, DF = 8\text{in}$ ، وطول الشكل الأصلي 1.5in، فما طول صورة الشكل المنسوخ؟

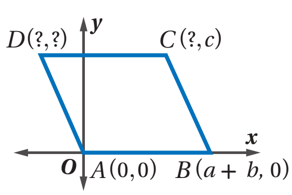
الربط مع الحياة

المِنْسَاخ هو أداة هندسية تستعمل لنسخ صورة أو مخطط وفق مقياس رسم معين.

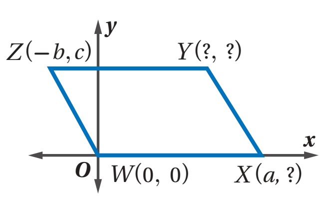
31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 1.11

أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

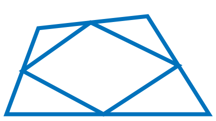
32)



33)



34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.



35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.

b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	
	$\overline{BD}$	
$MNOP$	$\overline{MO}$	
	$\overline{NP}$	
$WXYZ$	$\overline{WY}$	
	$\overline{XZ}$	

مراجعة المفردات

مقياس الرسم: هو نسبة تستعمل لتمثيل الأشياء التي تكون كبيرة جدًا أو صغيرة جدًا عندما ترسم بحجمها الحقيقي. ويعطي المقياس نسبة تقارن بين قياسات الرسم أو النموذج وقياسات الأشياء الحقيقية.

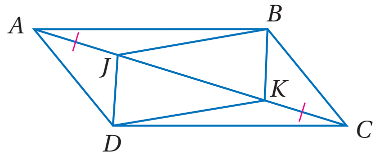
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة $(0, 1)$. ويقع أحد رؤوسه عند النقطة $(2, 4)$، بينما يقع رأس آخر عند النقطة $(3, 1)$. أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 1.9 و 1.3 .

38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$. بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 1.9 وَ 1.10 وَ 1.11 وَ 1.12 وعكسها.

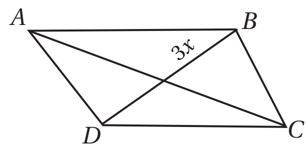
تدريب على اختبار

41) إذا كان الضلعان $\overline{AB}, \overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ **C** $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ **D** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40, BD = \frac{3}{5}AC$ ، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



مراجعة تراكمية

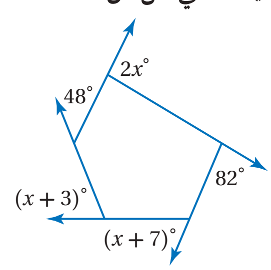
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 1-2)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

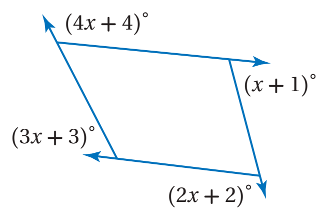
44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 1-1)

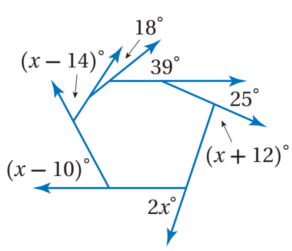
45)



46)



47)



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

48) $140°$

49) $160°$

50) $168°$

51) $162°$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان $\overline{XY}, \overline{YZ}$ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

52) $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

53) $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

اختبار منتصف الفصل

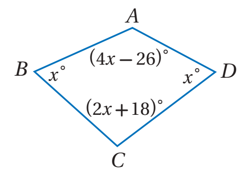
الدروس 1-1 إلى 3-1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-1)

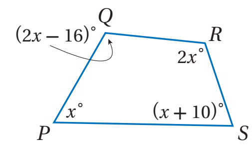
1) الخماسي
2) السباعي
3) ذو 18 ضلعًا
4) ذو 23 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-1)

5)



6)

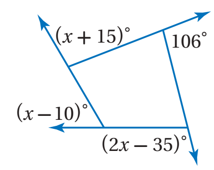


أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي : (الدرس 1-1)

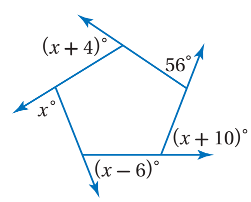
7) 720°
8) 1260°
9) 1800°
10) 4500°

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-1)

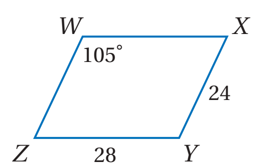
11)



12)



استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 1-2)

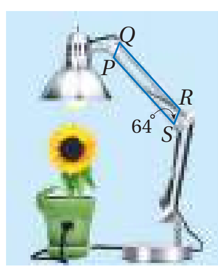


13) $m\angle WZY$

14) WZ

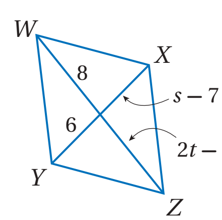
15) $m\angle XYZ$

16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle P$ في $\square PQRS$. (الدرس 1-2)

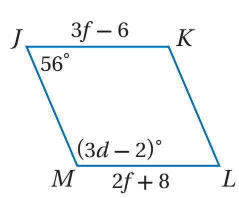


جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 1-2)

17)



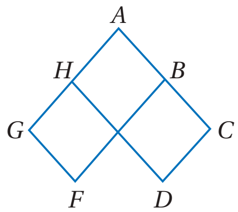
18)



19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 1-2)

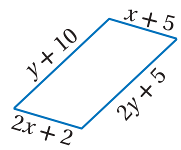
المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$

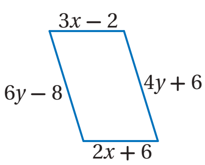


أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 1-3)

20)



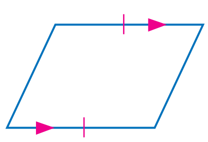
21)



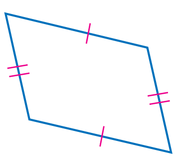
22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 1-3)

23) **اختيار من متعدّد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 1-3)

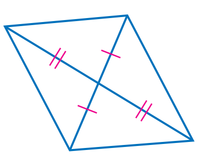
A



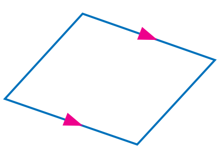
B



C



D



هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 1-3)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

1-4 المستطيل
Rectangle

فيما سبق:
درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(الدرس 1-2)

والآن:
- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا.

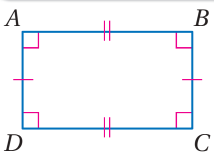
المفردات:
المستطيل
rectangle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا؟


أحمد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات الرياضيات في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات الرياضيات، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل يبدأ طوله من أسفل الجدار ويمتد للأعلى، وكان طوله 80 in ، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

خصائص المستطيل: **المستطيل** هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية:
- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصِّف كل منهما الآخر.



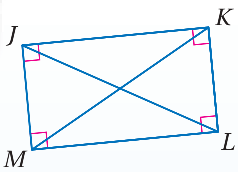
المستطيل $ABCD$

وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:

نظرية 1.13 قطرا المستطيل
أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

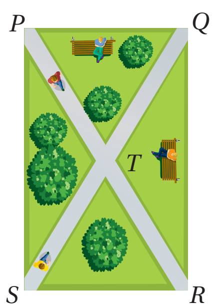
مثال: إذا كان $\square JKLM$ مستطيلًا ، فإنّ $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.



سوف تبرهن النظرية 1.13 في السؤال 33 .

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص المستطيل

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور. إذا كان $PR = 200$ m، فأوجد QT.



$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصِّف كل منهما الآخر؛ لذا

$$QT = \frac{1}{2} QS$$

$$QT = \frac{1}{2}(200) = 100 \quad \text{بالتعويض}$$

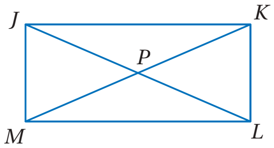
تحقق من فهمك
استعن بالشكل في المثال 1.

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64^\circ$، فأوجد $m\angle SQR$.

يمكنك استعمال خصائص المستطيل والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2 استعمال خصائص المستطيل والجبر



جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x + 4)^\circ$ و $m\angle JLK = (7x + 5)^\circ$، فأوجد قيمة x.

بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90^\circ$.
وبما أن $JKLM$ المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.
لذا فإن $\angle JLM \cong \angle KJL$، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = m\angle MLK$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90^\circ$	بالتعويض
$(2x + 4)^\circ + (7x + 5)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(9x + 9)^\circ = 90^\circ$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x^\circ = 81^\circ$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

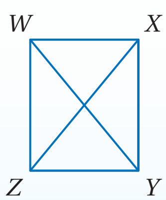
تحقق من فهمك

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $JP = 3y - 5$, $MK = 5y + 1$، فأوجد قيمة y.

إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا: عكس النظرية 1.13 صحيح أيضًا.

نظرية 1.14

أضف إلى مطويتك



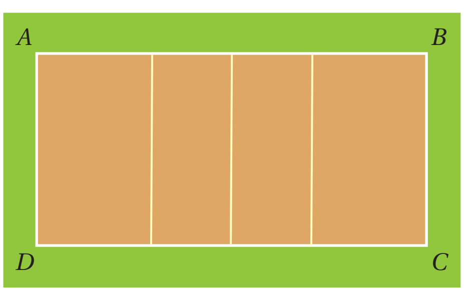
إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنّه مستطيل.

مثال: في $\square WXYZ$، إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$، فإنّ $\square WXYZ$ مستطيل.

سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 34.

مثال 3 من واقع الحياة إثبات علاقات في المستطيل

كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft، $AC = 67$ ft، $BD = 67$ ft، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.



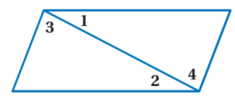
بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم: تذكّر من النظرية 1.6 أنّه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

إرشادات للدراسة

الزاويتان المتبادلتان داخليًّا بالنسبة لقطر: درست سابقًا في نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليًّا أنَّه إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإنَّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليًّا متطابقتان، وينطبق هذا على الزاويتين المتبادلتين بالنسبة لقطر متوازي الأضلاع.



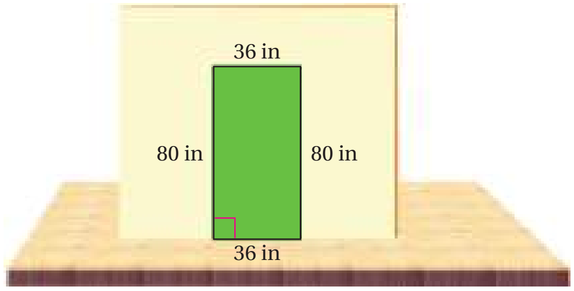
مثال:
$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$

الربط مع الحياة

كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة، فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.

تحقق من فهمك

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



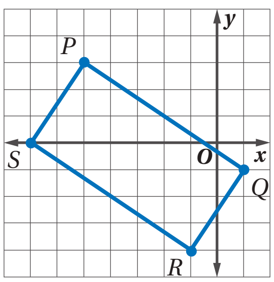
الربط مع الحياة

زاوية النجارين: عبارة عن ضلع خشبي سميك ومسطرة معدنية مثبتة معه بحيث يصنعان زاوية $90°$، وتُصنع من المعدن أو الخشب، وتستخدم لقياس وتحديد الزوايا القائمة، ورسم خطوط عمودية على الأحرف.

يمكنك أيضًا استعمال خصائص المستطيل لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا مرسومًا في المستوى الإحداثي عُلمت إحداثيات رؤوسه هو مستطيل.

مثال 4 المستطيل والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $\square PQRS$ متطابقان؟

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $\square PQRS$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

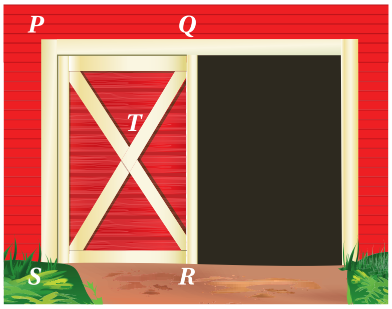
المستطيل ومتوازي الأضلاع: كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

✓ تأكـد

المثال 1 **زراعة :** الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.



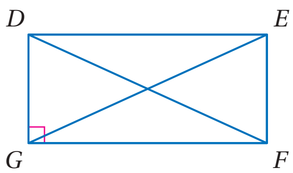
إذا كان $PS = 7\text{ ft}, ST = 3\dfrac{13}{16}\text{ ft}, m\angle PTQ = 67^\circ$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

1) QR 2) SQ

3) $m\angle TQR$ 4) $m\angle TSR$

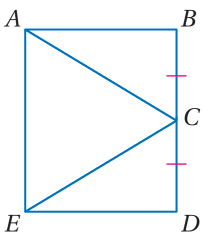
المثال 2 **جبر :** استعن بالمستطيل $DEFG$ المبيَّن جانبًا.



5) إذا كان $FD = 3x - 7\ ,\ EG = x + 5$، فأوجد EG .

6) إذا كان $m\angle EFD = (2x - 3)^\circ\ ,\ m\angle DFG = (x + 12)^\circ$، فأوجد $m\angle EFD$.

المثال 3 7) **برهان :** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$.



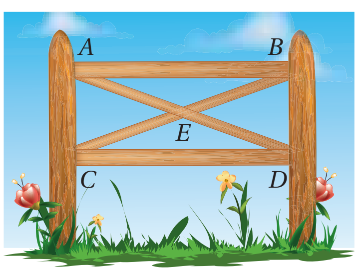
المثال 4 **هندسة إحداثيّة :** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **سياج :** سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.



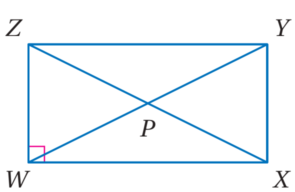
إذا كان $AB = 6\text{ ft}, AC = 2\text{ ft}, m\angle CAE = 65^\circ$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

10) BD 11) CB

12) $m\angle DEB$ 13) $m\angle ECD$

المثال 2 **جبر :** استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



14) إذا كان $ZY = 2x + 3\ ,\ WX = x + 4$، فأوجد WX.

15) إذا كان $PY = 3x - 5\ ,\ WP = 2x + 11$، فأوجد ZP.

16) إذا كان $m\angle ZYW = (2x - 7)^\circ, m\angle WYX = (2x + 5)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYW$.

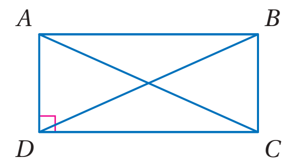
17) إذا كان $ZP = 4x - 9\ ,\ PY = 2x + 5$، فأوجد ZX.

18) إذا كان $m\angle XZY = (3x + 6)^\circ\ ,\ m\angle XZW = (5x - 12)^\circ$، فأوجد $m\angle YXZ$.

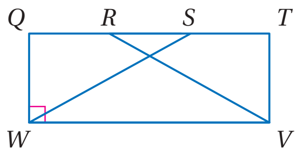
19) إذا كان $m\angle ZXW = (x - 11)^\circ\ ,\ m\angle WZX = (x - 9)^\circ$، فأوجد $m\angle ZXY$.

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



21) **المعطيات:** $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

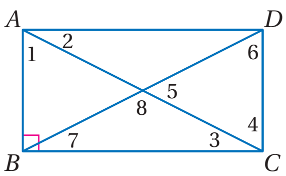
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

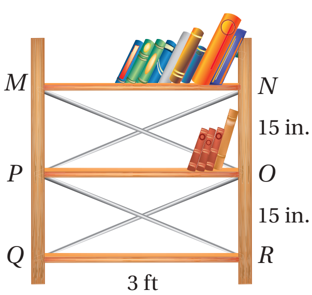
في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:



26) $m\angle 1$ **27)** $m\angle 7$ **28)** $m\angle 3$

29) $m\angle 5$ **30)** $m\angle 6$ **31)** $m\angle 8$

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور. كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(**إرشاد:** $12\,\text{in} = 1\,\text{ft}$)



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين:

33) النظريّة 1.13 **34)** النظريّة 1.14

35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضِّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

الربط مع الحياة

حددت رابطة كرة القدم الدولية (IFAP) الأبعاد القياسية لملعب كرة القدم في البطولات الرسمية الدولية فكانت 105m طولا، و 68m عرضًا.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

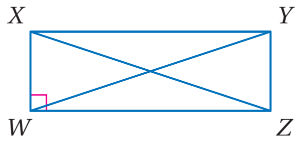
a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.

b) **جدوليًا:** استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي.

متوازي الأضلاع	$ABCD$		$MNOP$		$WXYZ$	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية						

c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

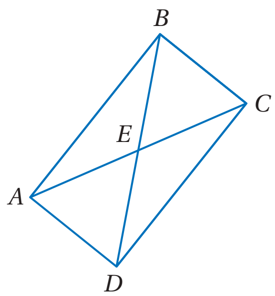
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3, WZ = 4$ ، فأوجد YW.

38) إذا كان $ZY = 6, XY = 8$ ، فأوجد WY.

مسائل مهارات التفكير العليا



39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$، $m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ, m\angle EBC = 60^\circ$، فأوجد قيمة كل من x , y.

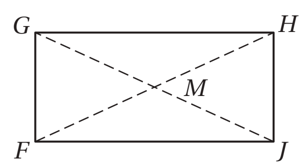
40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادَّيِ الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. هل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة.

42) **اكتب:** وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

تدريب على اختبار

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$ ، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y, GH = 11, GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلًا؟



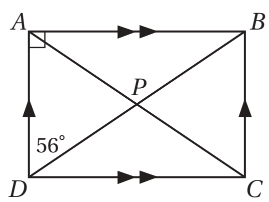
A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

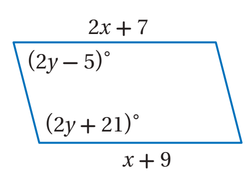
44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟



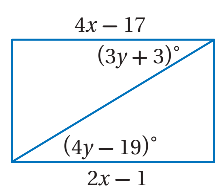
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-1)

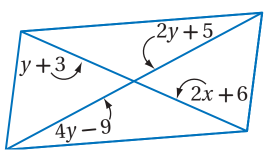
45)



46)



47)



48) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2), D(-1, -1)$ (الدرس 2-1)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

49) $(4, 2), (2, -5)$

50) $(0, 6), (-1, -4)$

51) $(-4, 3), (3, -4)$

5-1 المعيّن والمربع
Rhombus and Square

فيما سبق:

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

(الدرس 4-1)

والآن:

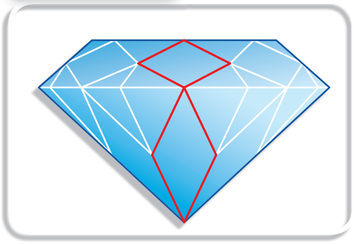
- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

المفردات:

المعيّن
rhombus

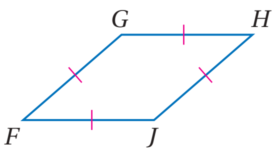
المربّع
square

لماذا؟



تصمم الألماسات باستعمال أنماط متكررة من الأشكال الهندسية. إذا صمم فنان الألماسة المجاورة، بحيث تكوّنت من أنماط متكررة من مثلثات وأشكال رباعية، كيف يمكن تحديد نوع الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟

خصائص المعيّن والمربّع:



المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :

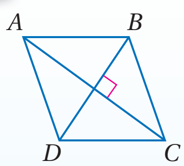
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطرا المعيّن

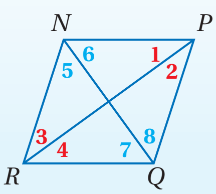
1.15 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان.**

مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



1.16 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.**

مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ
$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$



سوف تبرهن النظرية 1.16 في السؤال 28

برهان

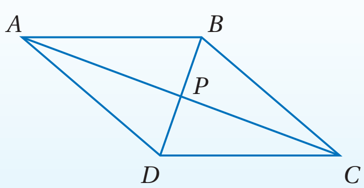
نظريّة 1.15

أكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.15

المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

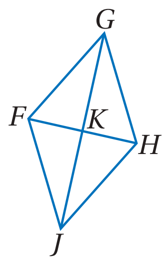
البرهان:



بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ بحسب التعريف.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle APB \cong \triangle CPB$ بحسب SSS.
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle CPB \cong \angle APB$.
وكذلك $\angle CPB$, $\angle APB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

مثال 1 استعمال خصائص المعيّن

استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.



a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2} m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) **جبر:** إذا كان $GH = x + 9$, $JH = 5x - 2$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

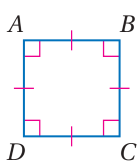
1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ.

1B) **جبر:** إذا كان $m\angle KFG = (9y - 5)°$, $m\angle JFK = (6y + 7)°$، فأوجد قيمة y.

إرشادات للدراسة

المربّع والمعيّن: كل مربّع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا، وكل مربع مستطيل وليس كل مستطيل مربعًا.

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.

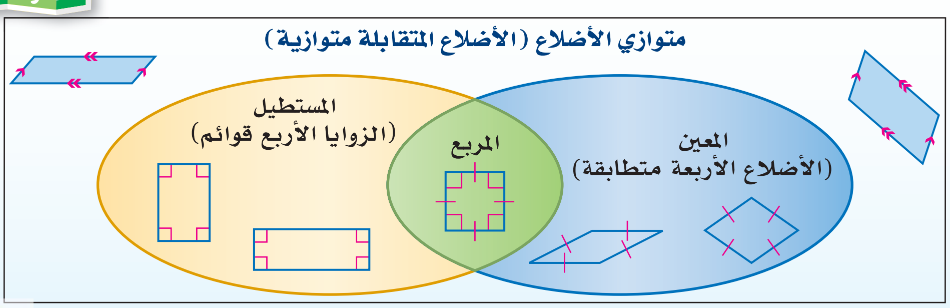


المربع $ABCD$

ويلخص شكل فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.

ملخص المفهوم متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك



جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

تنبيه !

أخطاء شائعة

يخطئ البعض فيستعمل النظريات **1.17, 1.18, 1.19** مع أي شكل رباعي، وهذا غير صحيح؛ لأن هذه النظريات تكون صحيحة فقط إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

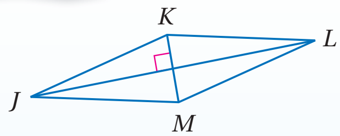
نظريات

أضف إلى مطويتك

الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

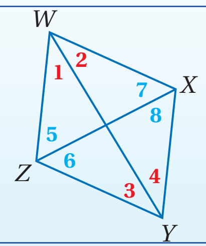
1.17 إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن. (عكس النظرية 1.15)

مثال: إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ ، فإنّ $\square JKLM$ معيّن.



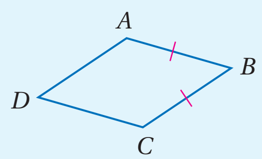
1.18 إذا نصّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا. (عكس النظرية 1.16)

مثال: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، وكانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\angle 3 \cong \angle 4$، أو $\angle 5 \cong \angle 6$ ، $\angle 7 \cong \angle 8$ ، فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.



1.19 إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه معيّن.

مثال: إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، فإنّ $\square ABCD$ معيّن.



1.20 إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.

سوف تبرهن النظريات 1.17 إلى 1.20 في الأسئلة 32–29 على الترتيب.

يمكنك استعمال خصائص المعيّن والمربع في البراهين.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة

بما أن للمعيَّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًّا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.

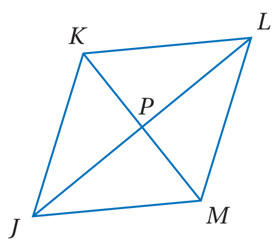
مثال 2 استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين

اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.

$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.



برهان حر:

بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$ ، لذا وبحسب النظرية 1.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.

✓ تحقق من فهمك

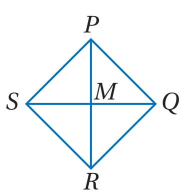
2) اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لِـ $\overline{PR}$.

$\overline{PR}$ عمود منصّف لِـ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

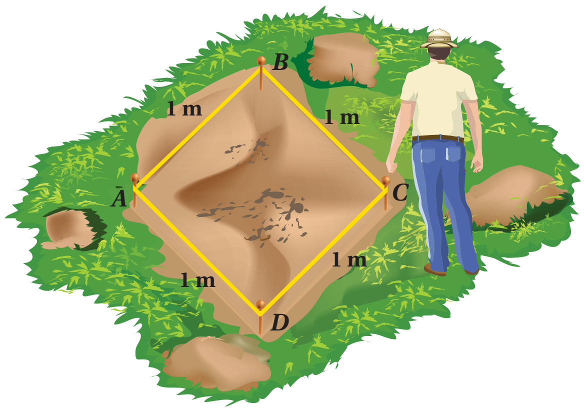


الربط مع الحياة

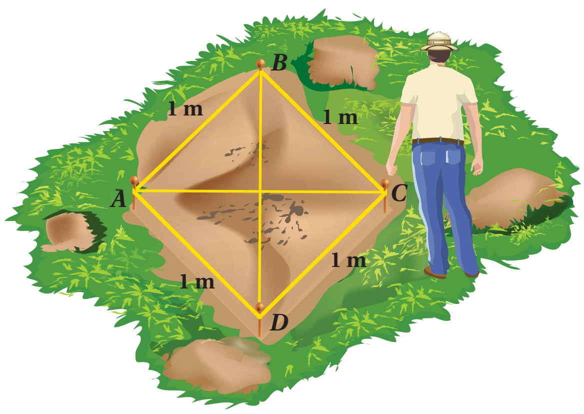
علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المعيّن والمربع

علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه $1\,m$ مستعملًا الحبل وشريط القياس فقط؟



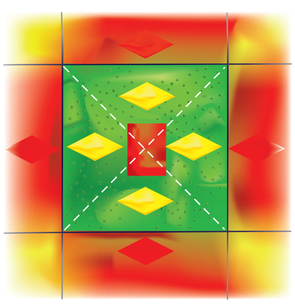
طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي $1\,m$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $\square ABCD$ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 1.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا يمكن لعالم الآثار استعمال الحبل لقياس طولي القطرين، فإذا وجدهما متساويين، فإن $\square ABCD$ يكون مربّعًا.

تحقق من فهمك

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضّح إجابتك.

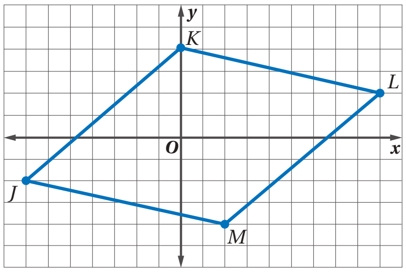
B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربّع؟ وضّح إجابتك.

استعملت الهندسة الإحداثيّة سابقًا لتصنيف المثلثات. ويمكن استعمال الهندسة الإحداثية لتصنيف الأشكال الرباعية أيضًا.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

افهم: **المعطيات:** $\square JKLM$ إحداثيات رؤوسه: $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$.



المطلوب: إثبات أن $\square JKLM$ هو معين أو مستطيل أو مربع.

خطط: عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.

يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

حل: أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $4\sqrt{17} \neq 2\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا. وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل KM: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل JL: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق:

$$JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$$

$$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$$

لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 1.20 .

ميل $\overline{JK}$: $\frac{4-(-2)}{0-(-7)} = \frac{6}{7}$ ، وميل $\overline{KL}$: $\frac{2-4}{9-0} = -\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✓

تحقق من فهمك

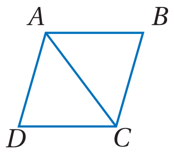
4) حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

إرشادات للدراسة

تمثيل الشكل بيانيًّا: عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًّا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًّا.

تأكـد

المثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًّا.

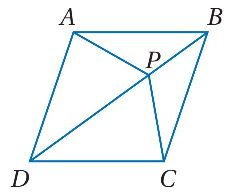


1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

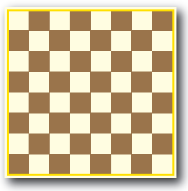
2) إذا كان $AB = 2x + 3\ ,\ BC = x + 7$، فأوجد CD.

المثالان 2, 3

3) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة مربعة متطابقة. استعمل هذه المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة.



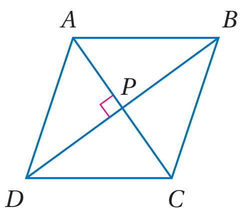
المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.



7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC.

8) إذا كان $m\angle BCD = 118°$، فأوجد $m\angle BAC$.

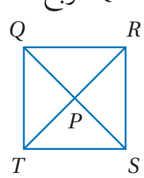
9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC.

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x - 7)°$ و $m\angle BCD = (2x + 3)°$، فأوجد $m\angle DAB$.

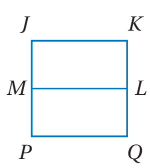
11) إذا كان $m\angle DPC = (3x - 15)°$، فأوجد قيمة x.

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

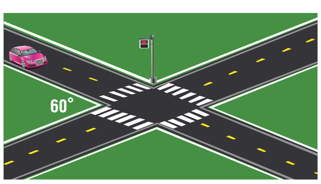
12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع.
$\overline{TR} \cong \overline{QS},\ m\angle QPR = 90°$
المطلوب: $QRST$ مربّع.



13) **المعطيات:** $JKQP$ مربّع.
$\overline{ML}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.
المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.

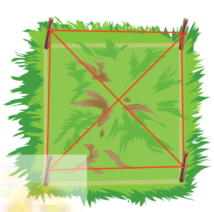


14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.



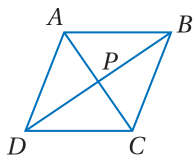
المثال 3

15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضِّح تبريرك.



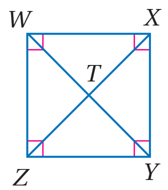
المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$
17) $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$
18) $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$
19) $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$



في المعين $ABCD$، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

20) AP
21) CP
22) $m\angle BDA$
23) $m\angle ACB$



في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

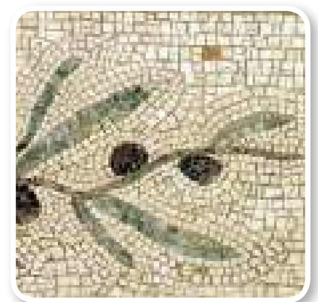
24) ZX
25) XY
26) $m\angle WTZ$
27) $m\angle WYX$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي :

28) النظريّة 1.16
29) النظريّة 1.17
30) النظريّة 1.18
31) النظريّة 1.19
32) النظريّة 1.20

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين :

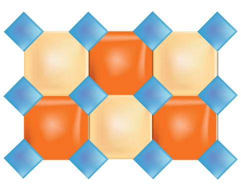
33) قطرا المربّع متعامدان.
34) تشكِّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



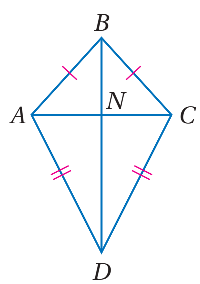
الربط مع الحياة

الفسيفساء صور تُشكّل باستعمال أنماط من أحجار أو زجاج أو قرميد أو أي مواد أخرى. والفسيفساء في الصورة أعلاه فسيفساء إغريقيّة قديمة من الصخر البلوري (الكوارتز). استعمل الإغريق قطعًا صغيرة أو أشكالًا منتظمة من المواد منذ 200 سنة قبل الميلاد بدلًا من الصخر البلوري في أعمال الفسيفساء.

35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضِّح تبريرك.



36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.



a) **هندسيًا:** ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيِّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.
استعمل المسطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين، $PQRS$، $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.

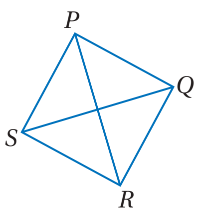
b) **جدوليًا:** استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس. وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$				
$PQRS$				
$WXYZ$				

c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

مسائل مهارات التفكير العليا

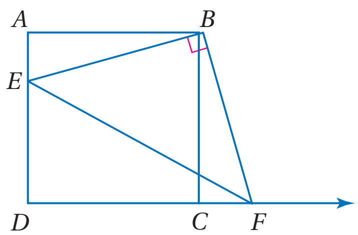
37) اكتشف الخطأ: في الشكل الرباعي $SRQP$ المبيَّن جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.



38) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدِّد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.

إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا، فإنّه مستطيل.

39) تحدٍّ: مساحة المربّع $ABCD$ المجاور تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$ ، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

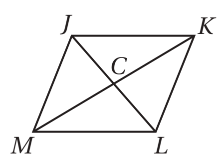


40) مسألة مفتوحة: أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

41) اكتب: قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية : متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع.

تدريب على اختبار

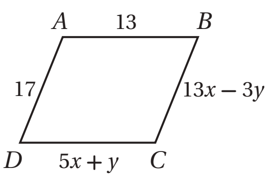
42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$ ، فأوجد JC.



A 4   **C** 8

B 6   **D** 10

43) جبر: ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟



A $x = 3, y = 2$

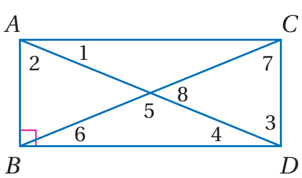
B $x = \frac{3}{2}, y = -1$

C $x = 2 , y = 3$

D $x = 3 , y = -1$

مراجعة تراكمية

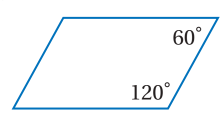
في المستطيل $ABDC$ ، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية : (الدرس 4-1)



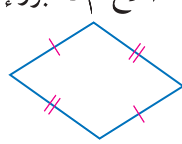
44) $m\angle 2$ **45)** $m\angle 5$ **46)** $m\angle 6$

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك. (الدرس 3-1)

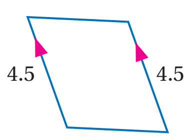
47)



48)



49)



50) قياسات: قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft. فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي :

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$ **52)** $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ **53)** $\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة
Trapezoid and Kite

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

(الدرس 1-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص شبه المنحرف وأطبّقها.
- أتعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وأطبّقها.

المفردات:

شبه المنحرف
trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف
bases

ساقا شبه المنحرف
legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة
base angles

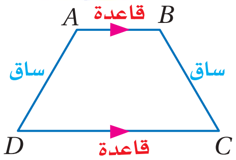
شبه المنحرف المتطابق الساقين
isosceles trapezoid

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة
kite

لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثّل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.



خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكوّن كل منهما من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبيَّن جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

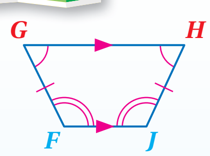
إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

نظريات — شبه المنحرف المتطابق الساقين

أضف إلى مطويتك

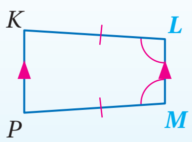
1.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle J \cong \angle F$, $\angle H \cong \angle G$.



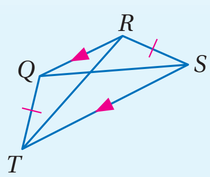
1.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.

مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle M \cong \angle L$ فإنه متطابق الساقين.



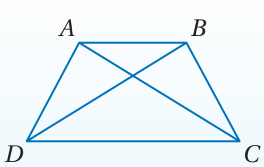
1.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{RT} \cong \overline{QS}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف، فيه $\overline{RT} \cong \overline{QS}$ فإنّه متطابق الساقين.



سوف تبرهن النظريات 1.23 , 1.22 , 1.21 في الأسئلة 21 ,20 ,19 على الترتيب.

برهان — الحالة الأولى من النظريّة 1.23



المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

$ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.
معطى

$\angle ADC \cong \angle BCD$
زاويتا قاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان.

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
تعريف شبه المنحرف المتطابق الساقين

$\overline{DC} \cong \overline{CD}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$
SAS

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

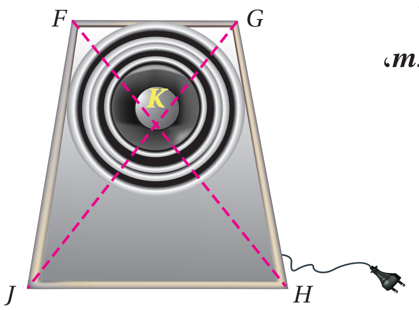
إرشادات للدراسة

شبه المنحرف المتطابق الساقين: تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.

الربط مع الحياة

مكبّرات الصوت هي مضخّمات تُكثّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين



مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\,in, JG = 19\,in$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

a) $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle GHJ$ و $\angle FJH$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$ — نظرية الزاويتين المتحالفتين

$m\angle FGH + 85° = 180°$ — بالتعويض

$m\angle FGH = 95°$ — بطرح 85 من كلا الطرفين

b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

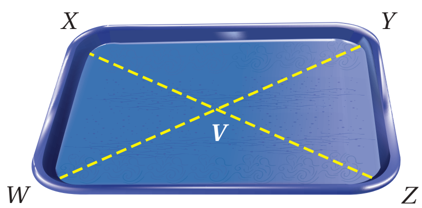
$FH = JG$ — تعريف تطابق القطع المستقيمة

$FK + KH = JG$ — مسلمة جمع القطع المستقيمة

$8 + KH = 19$ — بالتعويض

$KH = 11\text{ in}$ — بطرح 8 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك



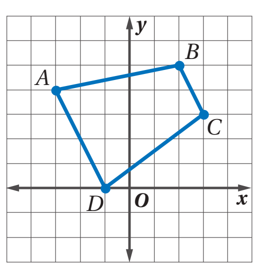
1) مطاعم: لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعم أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85°, WV = 15\text{ cm}$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

A) $m\angle XWZ$ **B)** $m\angle WXY$ **C)** XZ

يمكنك استعمال الهندسة الإحداثيّة لتحديد ما إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين أم لا.

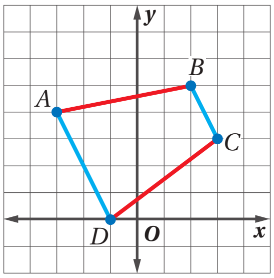
مثال 2 — شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$.
بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.



الضلعان المتقابلان $\overline{AD}$, $\overline{BC}$:

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3-5}{3-2}=\frac{-2}{1}=-2$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{0-4}{-1-(-3)}=\frac{-4}{2}=-2$

بما أن ميلي $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ متساويان، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{DC}$, $\overline{AB}$:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{5-4}{2-(-3)}=\frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$: $\frac{0-3}{-1-3}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB=\sqrt{(-3-2)^2+(4-5)^2}=\sqrt{26}$$

$$DC=\sqrt{(-1-3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.

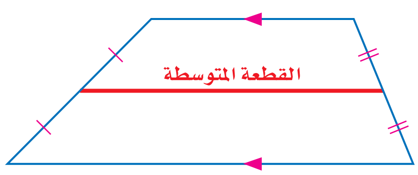
قراءة الرياضيات

رمز التوازي: تذكّر أنّ الرمز $\parallel$ يعني يوازي، والرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

✓ تحقق من فهمك

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضّح إجابتك.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.



قراءة الرياضيات

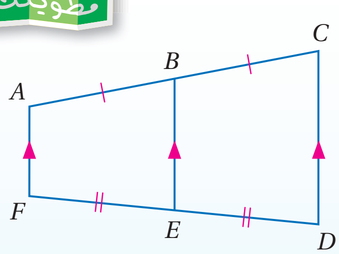
القطعة المتوسطة: تسمى القطعة المتوسطة لشبه المنحرف أيضًا القطعة المنصّفة.

نظرية 1.24 نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

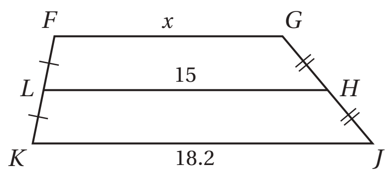
مثال: إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$ ،
فإنّ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ،
$BE=\frac{1}{2}(AF+CD)$.



سوف تبرهن النظريّة 1.24 في السؤال 25 .

مثال 3 من اختبار

في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



اقرأ سؤال الإختبار

أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$ نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

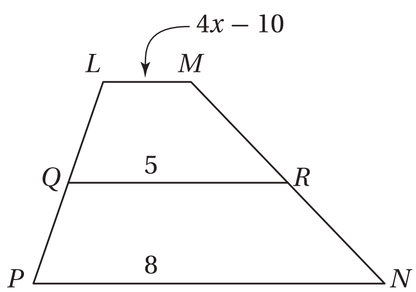
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$ بالتعويض

$30 = x + 18.2$ بضرب كلا الطرفين في 2

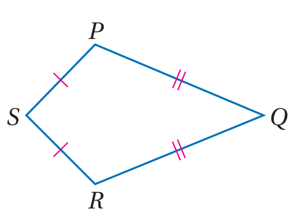
$11.8 = x$ بطرح 18.2 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟



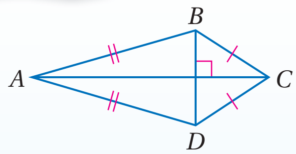
خصائص شكل الطائرة الورقيّة : **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.



نظريات

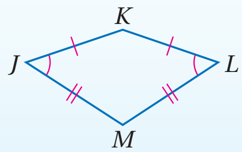
أضف إلى مطويتك

شكل الطائرة الورقيّة



1.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.

مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة ، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



1.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

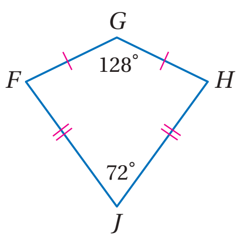
مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \ncong \angle M$.

سوف تبرهن النظريتين 1.26 , 1.25 في السؤالين 23 ,22 على الترتيب.

يمكنك استعمال النظريتين أعلاه ونظرية فيثاغورس ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقيّة.

مثال 4 استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

a) إذا كان $FGHJ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle F$.

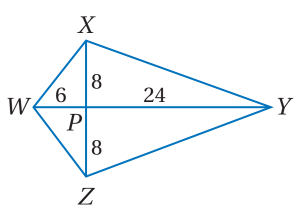


في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، وبما أن $\angle G \ncong \angle J$ ، فإنّ $\angle F \cong \angle H$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128° + m\angle F + 72° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

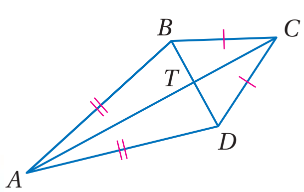
b) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد ZY .



بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

✓ تحقق من فهمك



4A) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه: $m\angle BAD = 38°$, $m\angle BCD = 50°$ ، فأوجد $m\angle ADC$.

4B) إذا كان $BT = 5$, $TC = 8$ ، فأوجد CD.

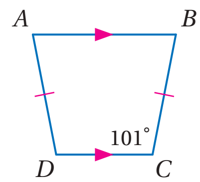
الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h. وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.

تأكـد

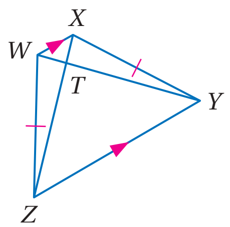
المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$



2) WT، إذا كان:

$ZX = 20,\ TY = 15$

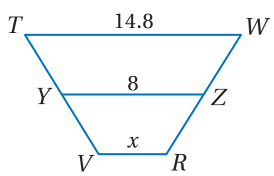


المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4, -1), B(-2, 3), C(3, 3), D(5, -1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

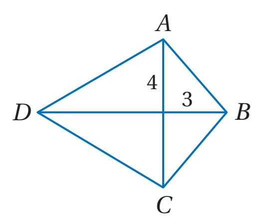
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضِّح إجابتك.

المثال 3 **5)** **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.

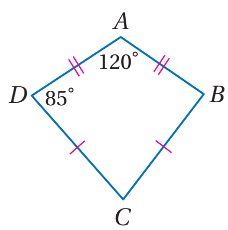


المثال 4 إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB



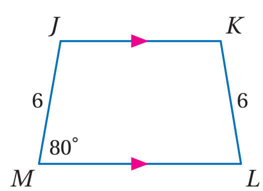
7) $m\angle C$



تدرب وحل المسائل

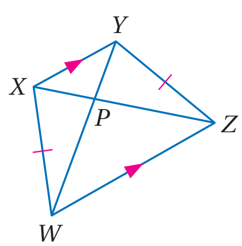
المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



9) PW، إذا كان:

$XZ = 18,\ PY = 3$



المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

10) $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

11) $J(-4, -6), K(6, 2), L(1, 3), M(-4, -1)$

12) $Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$

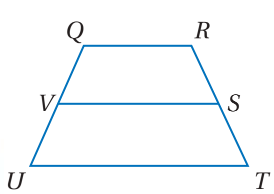
13) $W(-5, -1), X(-2, 2), Y(3, 1), Z(5, -3)$

المثال 3 في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.

14) إذا كان $UT = 22$ ، $QR = 12$ ، فأوجد VS.

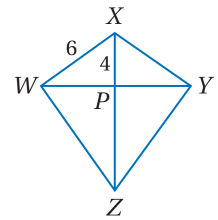
15) إذا كان $UT = 12$ ، $VS = 9$ ، فأوجد QR.

16) إذا كان $VS = 11$ ، $RQ = 5$ ، فأوجد UT.

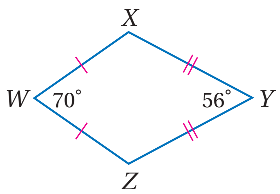


المثال 4 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

17) WP



18) $m\angle X$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية :

19) النظريّة 1.21

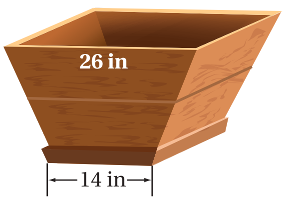
20) النظريّة 1.22

21) النظريّة 1.23

22) النظريّة 1.25

23) النظريّة 1.26

24) **نباتات:** اشترى مشاري أصيصًا زراعيًا أوجهه الأربعة على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الشكل المجاور. إذا أراد مشاري وضع رف أفقي عند منتصف الأصيص؛ لتستند إليه النبتة، فكم يكون عرض هذا الرفّ؟



الربط مع الحياة

تمتاز الأصص الفخارية بالمسامية والتهوية وصرف المياه الزائدة، ما يسمح بنمو جيد للجذور، وهي من أفضل الأصص الزراعية.

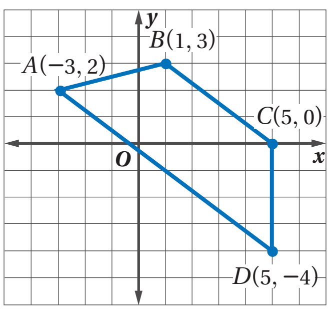
25) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا للنظريّة 1.24.

26) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

a) بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

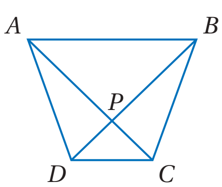
c) أوجد طول القطعة المتوسطة.



جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف. أوجد قيمة x بحيث يكون متطابق الساقين في كلٍّ ممّا يأتي:

27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$, $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$



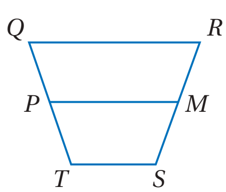
جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.

29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS.



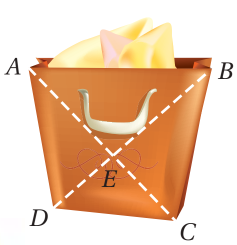
تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

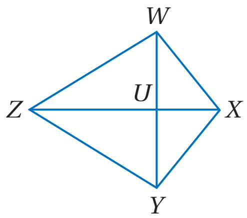
33) AE

34) AC

35) $m\angle BCD$

36) $m\angle EDC$

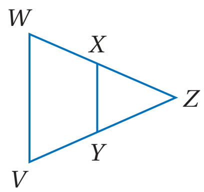




جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.

37) إذا كان $m\angle WXY = 120^\circ, m\angle WZY = (4x)^\circ$ ، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

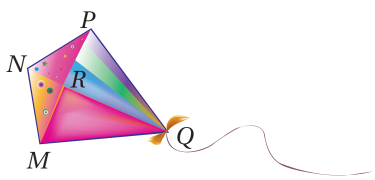
38) إذا كان $m\angle WXY = (13x + 24)^\circ, m\angle WZY = 35^\circ$ ، $m\angle ZWX = (13x + 14)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$.



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

39) **المعطيات:** $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}, \angle W \cong \angle ZXY$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



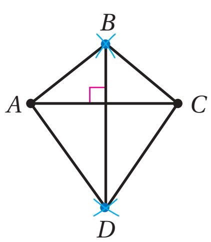
40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور .
اكتب باستعمال خصائص شكل الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

41) **أشكال ڤن:** ارسم شكل ڤن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف المتطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مستطيلًا، أم مربعًا، أم معينًا، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضِّح إجابتك.

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$



44) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

a) **هندسيًّا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$ كما في الشكل المجاور. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$.

b) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	$\overline{AB}$		$\overline{BC}$		$\overline{CD}$		$\overline{DA}$	
$PQRS$	$\overline{PQ}$		$\overline{QR}$		$\overline{RS}$		$\overline{SP}$	
$WXYZ$	$\overline{WX}$		$\overline{XY}$		$\overline{YZ}$		$\overline{ZW}$	

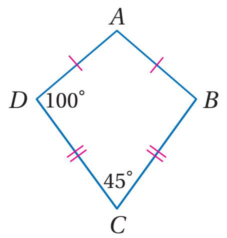
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين :

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

مسائل مهارات التفكير العليا



47) اكتشف الخطأ: أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

عادل	سعيد
$m\angle A = 115°$	$m\angle A = 45°$

48) تحدٍّ: إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x + 4, y = x - 8$، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

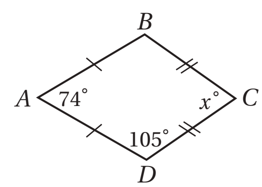
49) تبرير: هل العبارة "*المربع هو أيضًا شكل طائرة ورقيّة*" صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ وضّح إجابتك.

50) مسألة مفتوحة: ارسم شبه المنحرف $ABCD$، وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ و $\overline{BD} \cong \overline{GJ}$.

51) اكتب: قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

تدريب على اختبار

52) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟

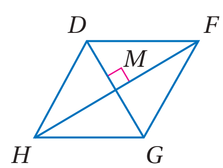


53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟
إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

A المربّع
B المعين
C متوازي الأضلاع
D شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-1)

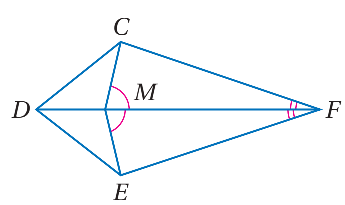


54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$، فأوجد $m\angle MHG$.

55) إذا كان $DM = 4x - 3$, $MG = x + 6$، فأوجد DG.

56) إذا كان $HD = 15$, $HM = 12$، فأوجد MG.

57) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-1)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$،
$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$

استعد للدرس اللاحق

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$ **59)** $(-x, 5x), (0, 6x)$ **60)** $(y, x), (y, y)$

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

زوايا المضلع (الدرس 1-1)

- يعطى مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدب بالصيغة $S = (n - 2)\cdot 180°$، حيث n عدد الأضلاع .
- مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

خصائص متوازي الأضلاع : (الدرسان 2-1 و 3-1)

- كل ضلعين متقابلين متطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- إذا كانت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ الزوايا الأخرى قوائم.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.
- قطره يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

خصائص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية (الدروس 4-1 إلى 6-1)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وقطراه متطابقان. وزواياه الأربع قوائم.
- للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع. وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان، والقطران متطابقان أيضًا.
- قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، ويوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسيّة

- **القطر** (ص. 12)
- **متوازي الأضلاع** (ص. 21)
- **المستطيل** (ص. 38)
- **المعين** (ص. 44)
- **المربّع** (ص. 45)
- **شبه المنحرف** (ص. 52)
- **قاعدتا شبه المنحرف** (ص. 52)
- **ساقا شبه المنحرف** (ص. 52)
- **زاويتا القاعدة** (ص. 52)
- **شبه المنحرف المتطابق الساقين** (ص. 52)
- **القطعة المتوسطة لشبه المنحرف** (ص. 54)
- **شكل الطائرة الورقيّة** (ص. 55)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةً أو غير صحيحةٍ ، وإذا كانت غير صحيحةٍ فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان.

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان.

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه.

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين.

5) قطرا المعين متعامدان.

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه.

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع.

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع.

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل.

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

1-1 زوايا المضلع (ص 19–12)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدّبين الآتيين :

(11 العشاري.

(12 ذو 15 ضلعًا.

(13 **زخرفة :** يمثّل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًّا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

(14 135°

(15 168°

مثال 1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدّب عدد أضلاعه 22 ضلعًا.

$S = (n-2)\cdot 180^\circ$	بكتابة معادلة
$= (22-2)\cdot 180^\circ$	بالتعويض
$= 20\cdot 180^\circ$	بالطرح
$= 3600^\circ$	بالضرب

مثال 2

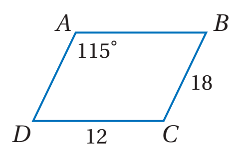
قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم 157.5. أوجد عدد أضلاعه.

$157.5n = (n-2)\cdot 180^\circ$	بكتابة المعادلة
$157.5^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$	خاصيّة التوزيع
$-22.5^\circ n = -360^\circ$	بالطرح
$n = 16$	بالقسمة

إذن عدد أضلاع المضلع 16 ضلعًا.

1-2 متوازي الأضلاع (ص 28–21)

استعمل $\square ABCD$ المبيّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



(16 $m\angle ADC$

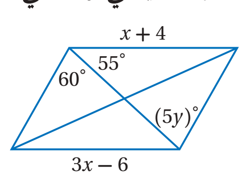
(17 AD

(18 AB

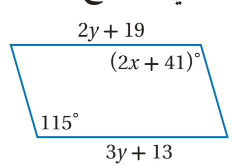
(19 $m\angle BCD$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

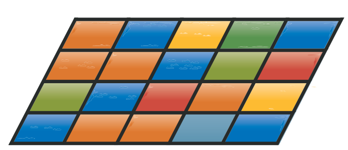
(20



(21

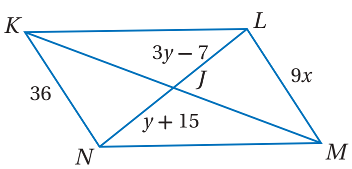


(22 **تصميم :** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟



مثال 3

جبر: إذا كان $KLMN$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي :



a) x

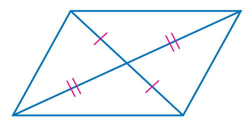
$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الأضلاع المتقابلة في ▱ متطابقة
$KN = LM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	بالقسمة

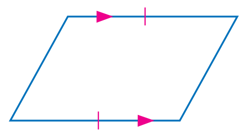
b) y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا ▱ ينصّف كل منهما الآخر
$NJ = JL$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	بالطرح
$y = 11$	بالقسمة

1-3 تمييز متوازي الأضلاع (ص 36–29)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

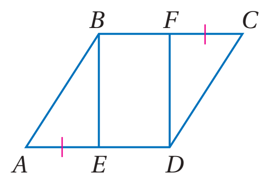
(23


(24


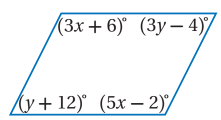
(25 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

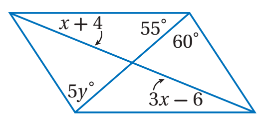
المعطيات: $\square ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.



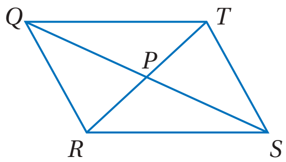
جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(26


(27


مثال 4

إذا كان $TP = 4x + 2, QP = 6 - 2y, PS = 12 - 5y$، $PR = 6x - 4$، فأوجد قيمتي x, y بحيث يكون $QRST$ متوازي أضلاع.

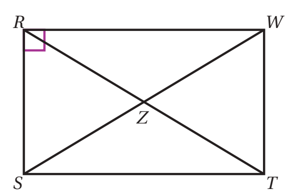


أوجد قيمة x بحيث تكون $\overline{TP} \cong \overline{PR}$ وقيمة y بحيث تكون $\overline{QP} \cong \overline{PS}$.

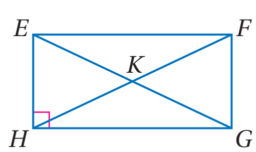
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	بالطرح
$x = 3$	بالقسمة
$QP = PS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6 - 2y = 12 - 5y$	بالتعويض
$3y = 6$	بالطرح
$y = 2$	بالقسمة

1-4 المستطيل (ص 43–38)

(28 **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ=(2x+5)\text{in}$ ،$SW=(5x-20)\text{in}$، فأوجد x؟



جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



(29 إذا كان $m\angle FEG = 57^\circ$، فأوجد $m\angle GEH$.

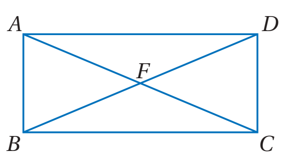
(30 إذا كان $m\angle HGE = 13^\circ$، فأوجد $m\angle FGE$.

(31 إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG.

(32 أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$.

مثال 5

جبر: في المستطيل $ABCD$ أدناه ، إذا كان $m\angle ADB = (4x+8)^\circ$, $m\angle DBA = (6x+12)^\circ$، فأوجد قيمة x .



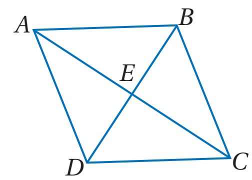
بما أنّ $ABCD$ مستطيل، فإنّ $m\angle ABC = 90^\circ$. وبما أن الأضلاع المتقابلة في المستطيل متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطرين متطابقة، فإنّ $\angle DBC \cong \angle ADB$ ، ومن تعريف التطابق $m\angle DBC = m\angle ADB$.

$m\angle DBC + m\angle DBA = 90^\circ$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle ADB + m\angle DBA = 90^\circ$	بالتعويض
$(4x + 8)^\circ + (6x + 12)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$10x^\circ + 20^\circ = 90^\circ$	بالجمع
$10x^\circ = 70^\circ$	بالطرح
$x = 7$	بالقسمة

دليل الدراسة والمراجعة

1-5 المعين والمربع (ص 51–44)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$، $m\angle ABD = 55°$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



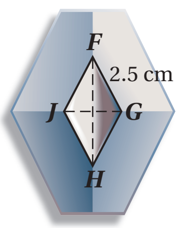
33) AE

34) $m\angle BDA$

35) CE

36) $m\angle ACB$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول $\overline{FJ}$؟



هندسة إحداثيّة : حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

مثال 6

يتقاطع قطرا المعين $QRST$ عند النقطة P. استعمل المعطيات لإيجاد المطلوب في كل مما يأتي:

a) **جبر:** إذا كان $QT = x + 7 , TS = 2x - 9$، فأوجد قيمة x .

$\overline{QT} \cong \overline{TS}$	تعريف المعين
$QT = TS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 7 = 2x - 9$	بالتعويض
$-x = -16$	بالطرح
$x = 16$	بالقسمة

b) إذا كان $m\angle QTS = 76°$، فأوجد $m\angle TSP$.

بما أنّ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle QTS$، فإنّ $m\angle PTS = \frac{1}{2}\, m\angle QTS$.

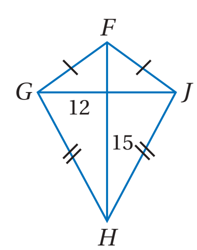
لذلك $m\angle PTS = \frac{1}{2}(76) = 38°$، وبما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ $m\angle TPS = 90°$.

$m\angle PTS + m\angle TPS + m\angle TSP = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$38° + 90° + m\angle TSP = 180°$	بالتعويض
$128° + m\angle TSP = 180°$	بالجمع
$m\angle TSP = 52°$	بالطرح

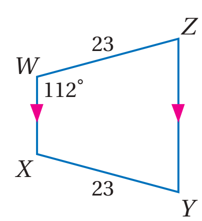
1-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة (ص 60–52)

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

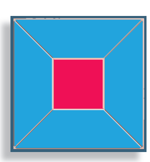
40) GH



41) $m\angle Z$



42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

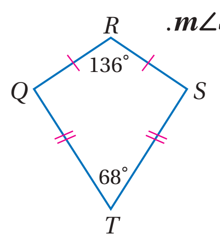


a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

مثال 7

إذا كان $QRST$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle S$.



بما أنّ $\angle Q \cong \angle S$، فإنّ $m\angle Q = m\angle S$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle S$.

$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle S + 136° + m\angle S + 68° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle S + 204° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle S = 156°$	بالطرح
$m\angle S = 78°$	بالقسمة

اختبار الفصل

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

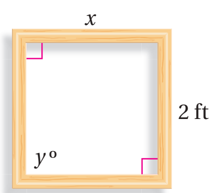
1) السداسي

2) ذو 16 ضلعًا

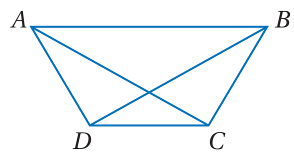
3) **فن:** تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنّها ستمثّل مربّعًا.

a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة.



الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟

5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟

6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

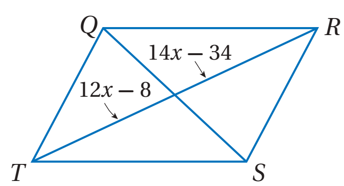
7) $900°$

8) $1980°$

9) $2880°$

10) $5400°$

11) **اختيار من متعدّد:** إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



A 11

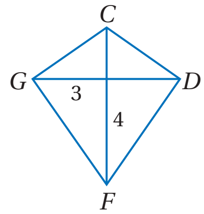
B 12

C 13

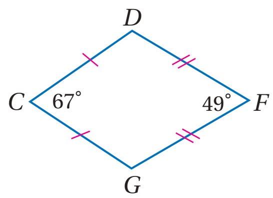
D 14

إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

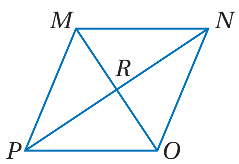
12) GF



13) $m\angle D$



جبر: استعن بالمعين $MNOP$، للإجابة عن الأسئلة الآتية:



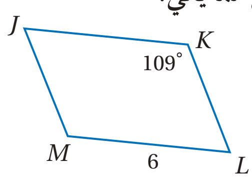
14) $m\angle MRN$

15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN.

16) إذا كان $m\angle PON = 124°$، فأوجد $m\angle POM$.

17) **إنشاءات:** تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

استعمل $\square JKLM$ المبيّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

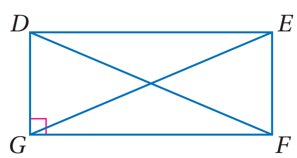


18) $m\angle JML$

19) JK

20) $m\angle KLM$

جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



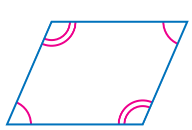
21) إذا كان $DF = 2(x + 5) - 7$, $EG = 3(x - 2)$، فأوجد EG.

22) إذا كان $m\angle EDF = (5x - 3)°$, $m\angle DFG = (3x + 7)°$، فأوجد $m\angle EDF$.

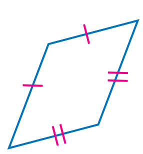
23) إذا كان $DE = 14 + 2x$, $GF = 4(x - 3) + 6$، فأوجد GF.

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك.

24)



25)



الإعداد للاختبارات

تطبيق التعريفات والخصائص

يتطلب حل كثير من المسائل الهندسيّة في الاختبارات تطبيق التعريفات والخصائص. استعمل هذه الصفحة والتي تليها للتدرّب على تطبيق التعريفات والخصائص عند حل أسئلة الهندسة ذات الإجابات المطولة.

استراتيجيات تطبيق التعريفات والخصائص

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية.

- حدّد المطلوب في المسألة.
- ادرس الأشكال المعطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك**: ما خصائص هذا الشكل التي يمكنني تطبيقها لحل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- حدّد التعريفات أو المفاهيم الهندسيّة التي يمكنك استعمالها لمساعدتك على إيجاد القيم المجهولة في المسألة.
- استعمل التعريفات وخصائص الأشكال لكتابة معادلة وحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

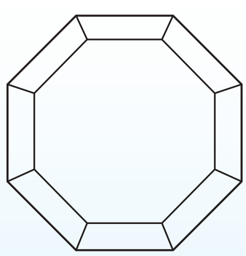
مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

يصنع خالد إطارًا خشبيًّا على شكل ثماني منتظم محيطه 288 cm.

a) ما طول كل لوح خشبي يشكّل ضلعًا للإطار؟

b) ما الزاوية التي سيُقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح بعضها مع بعض وتشكل الإطار؟ وضِّح إجابتك.



a) **طول كل ضلع من أضلاع الإطار أو طول كل لوح خشبي.**

الخطوة 1: اقرأ المسألة بعناية، علمت أن الألواح ستشكل ثمانيًّا منتظمًا محيطه 288 cm. والمطلوب إيجاد طول كل لوح خشبي.

الخطوة 2: حل المسألة، لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الألواح.

$288 \div 8 = 36$

إذن طول كل لوح يجب أن يكون 36 cm.

الخطوة 3: تحقق من حلك بإيجاد محيط المضلع: محيط المضلع المنتظم = عدد الأضلاع × طول الضلع الواحد

$8 \times 36\,\text{cm} = 288\,\text{cm}$ ✓

b) **قياس الزاوية التي سيقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح وتشكل الإطار.**

الخطوة 1: المطلوب إيجاد قياس الزاوية التي ستقطع بها الألواح عند أطرافها حتى يتلاءم بعضها مع بعض تمامًا.

الخطوة 2: حل المسألة، استعمل خاصيّة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع المحدَّب لإيجاد قياس زاوية داخليّة للثماني المنتظم.

أوجد أولًا المجموع S لقياسات الزوايا الداخليّة.

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$
$$= (8-2) \cdot 180^\circ$$
$$= 1080^\circ$$

إذن قياس الزاوية الداخليّة للثُّماني المنتظم يساوي $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$. وبما أنّه سيُستعمل لوحان لتشكيل كل رأس للإطار، فإن كل طرف للألواح سيُقطع بزاوية قياسها $135^\circ \div 2 = 67.5^\circ$.

الخطوة 3: تحقق من حلك بالحل عكسيًّا

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم (n) الذي قياس زاويته الداخلية 135°.

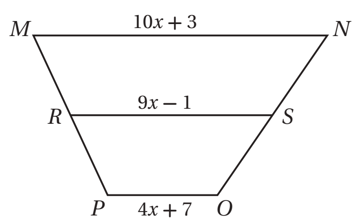
$$135^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
$$135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$$
$$-45^\circ n = -360^\circ$$
$$n = 8$$ ✓

تمارين ومسائل

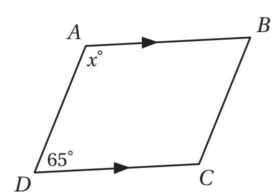
اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب . ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيِّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$.

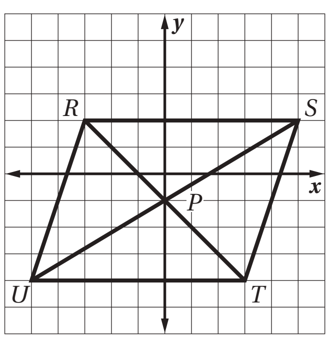
ما طول $\overline{RS}$ ؟



2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، فأوجد قيمة x .



3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

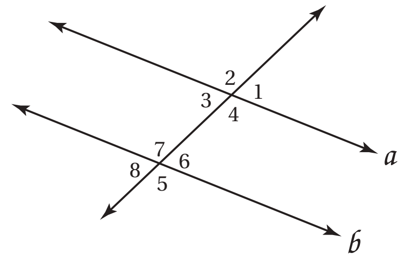
4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

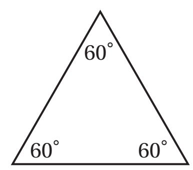
1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

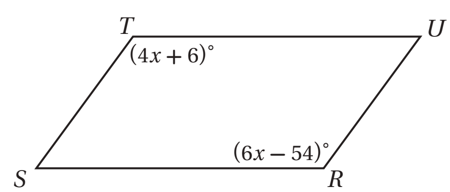
2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.



A حادّ الزوايا **C** منفرج الزاوية

B متطابق الزوايا **D** قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



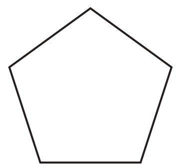
A 12 **C** 25

B 18 **D** 30

إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص متوازي الأضلاع لحل المسألة.
كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

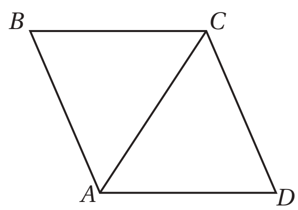
4) ما قياس كل زاوية داخلية في الخُماسي المنتظم؟



A 96° **C** 120°

B 108° **D** 135°

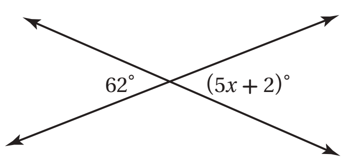
5) الشكل الرباعي $ABCD$ معين،
فيه $m\angle BCD = 120^\circ$، أوجد $m\angle DAC$.



A 30° **C** 90°

B 60° **D** 120°

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



A 10 **C** 14

B 12 **D** 15

7) $\overline{AE}$, $\overline{DT}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S.
إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟

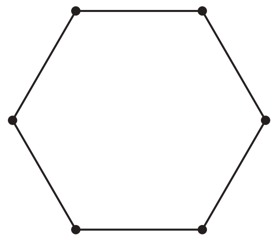
A 35 **C** 15

B 25 **D** 10

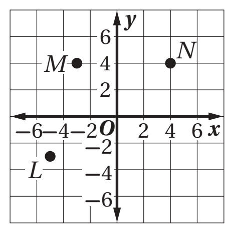
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) تشكّل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟



9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل.



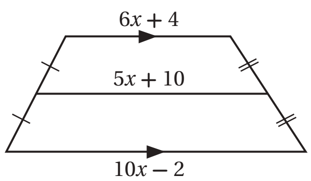
10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.

11) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

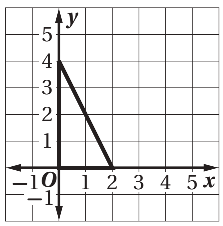
المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.
العدد 144 يقبل القسمة على 9.

النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

12) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا.



13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟

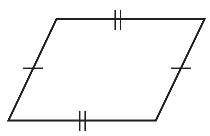


أسئلة ذات إجابات مطولة

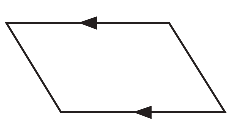
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

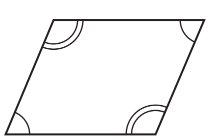
a)



b)



c)



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	مهارة سابقة	مهارة سابقة	1-2	1-1	1-5	مهارة سابقة	1-4	1-1	1-6	1-5	مهارة سابقة	1-6	مهارة سابقة	1-3

الفصل 2

التشابه
Similarity

فيما سبق:
درستُ النسبة والتناسب وتطبيقاتهما الحياتية.

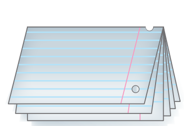
والآن:
- أتعرّف المضلعات المتشابهة، وأستعمل النسبة والتناسب لحل المسائل.

لماذا؟
تصميم: يتم تصميم بعض المجسمات والمباني لتشابه أشياء مشهورة بحيث يكون هناك تناسب بين الأطوال في تلك المجسمات ونظيراتها في الشكل الأصلي.

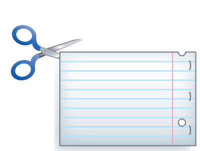
المطويات — منظم أفكار

التشابه: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل **2**، مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

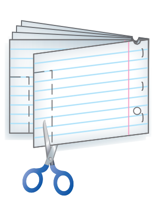
1. اطوِ كلًا من الأوراق الثلاث من المنتصف.



2. قُصّ الأوراق على طول خط الطيّ.



3. قُصّ الجانب الأيسر لكل ورقة؛ لعمل شرائط فهرسة، ثم ثبِّت الحافة اليمنى؛ بحيث تشكل الأوراق دفترًا.



4. اكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، وأرقام الدروس على الأشرطة، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد :

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$

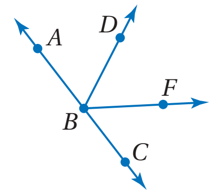
2) $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$

3) $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$

4) $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$

5) **تعليم:** نسبة عدد الطلاب إلى عدد المعلمين في مدرسة هي 17 إلى 1. إذا كان عدد طلاب المدرسة 1088 طالبًا، فما عدد المعلمين؟

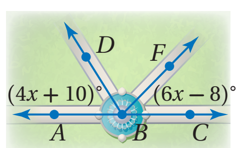
جبر: في الشكل أدناه، $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيم متعاكسان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$. (مهارة سابقة)



6) إذا كان: $m\angle ABF = (3x-8)°, m\angle ABD = (x+14)°$، فأوجد $m\angle ABD$.

7) إذا كان: $m\angle FBC = (2x+25)°, m\angle ABF = (10x-1)°$، فأوجد $m\angle DBF$.

8) **حدائق:** يخطط مهندس لإضافة ممرات تصل إلى نافورةٍ كما هو مبيّن أدناه، إذا كان $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ نصفي مستقيم متعاكسين و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$، فأوجد $m\angle FBC$.



مراجعة سريعة

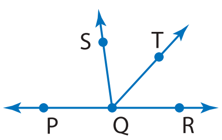
مثال 1

حل المعادلة: $\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$.

$\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$	المعادلة الأصليّة
$3(4x-3) = 5(2x+11)$	خاصية الضرب التبادلي
$12x - 9 = 10x + 55$	خاصيّة التوزيع
$2x = 64$	خاصية الجمع والطرح للمساواة
$x = 32$	خاصية القسمة للمساواة

مثال 2

في الشكل أدناه، $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}$ نصفا مستقيم متعاكسان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، إذا كان: $m\angle SQR = (6x+8)°$، $m\angle TQR = (4x-14)°$، فأوجد $m\angle SQT$.



بما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$	تعريف منصّف الزاوية
$6x + 8 = 2(4x - 14)$	بالتعويض
$6x + 8 = 8x - 28$	خاصيّة التوزيع
$-2x = -36$	خاصية الطرح للمساواة
$x = 18$	خاصية القسمة للمساواة

وبما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQT = m\angle TQR$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle SQT = 4x - 14$	بالتعويض
$m\angle SQT = 58°$	بالتعويض عن $x = 18$ والتبسيط

2-1 المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ استعمال التناسب لحل المسائل.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التناسب لتَحديد المضلعات المتشابهة.
- أحل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

المفردات:
المضلعات المتشابهة
similar polygons
معامل التشابه
scale factor
نسبة التشابه
similarity ratio

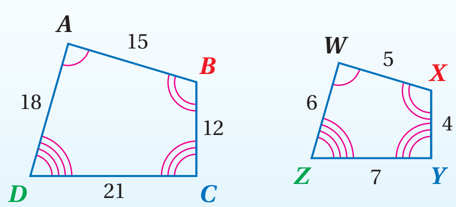
لماذا؟
يزيّن بعض الأشخاص شاشات حواسيبهم باستعمال صور شخصية لهم، وذلك بوضع صورة بحجمها الأصلي في وسط الشاشة، أو بتكبيرها لتملأ الشاشة، إلَّا أن الطريقة الثانية تُظهر الصورة مشوّهةً؛ لأن الصورة الأصلية والصورة الجديدة لا تكونان متشابهتين هندسيًّا.


تحديد المضلعات المتشابهة: **المضلعات المتشابهة** لها الشكل نفسه، ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها.

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة
أضف إلى مطويتك

يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثـال: في الشكل أدناه، $ABCD$ يشابه $WXYZ$.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle W,\ \angle B \cong \angle X,\ \angle C \cong \angle Y,\ \angle D \cong \angle Z$

التناسب:

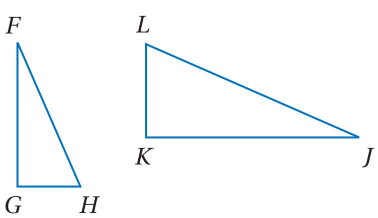
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$$

الرموز: $ABCD \sim WXYZ$

وكما هو الحال في عبارة التطابق، فإن ترتيب الرؤوس في عبارة التشابه مثل $ABCD \sim WXYZ$ مهمٌّ جدًّا؛ لأنّه يحدّد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

مثال 1 استعمال عبارة التشابه

إذا كان $\triangle FGH \sim \triangle JKL$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



استعمل عبارة التشابه.

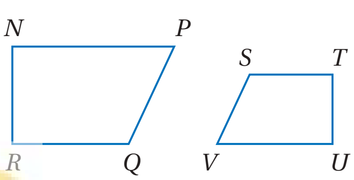
$\triangle FGH \sim \triangle JKL$

الزوايا المتطابقة: $\angle F \cong \angle J,\ \angle G \cong \angle K,\ \angle H \cong \angle L$

التناسب: $\frac{FG}{JK} = \frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$

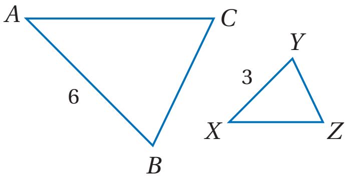
✓ تحقق من فهمك

1) إذا كان $NPQR \sim UVST$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



قراءة الرياضيات
الرمزان $\nsim$ و $\sim$:
يُقرأ الرمز $\sim$ يشابه، ويقرأ الرمز $\nsim$ لايشابه، أو ليس مشابهًا لـ.

النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين تُسمىّ **معامل التشابه** أو (عامل المقياس). ويعتمد معامل التشابه على ترتيب المقارنة.



ففي الشكل المجاور $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

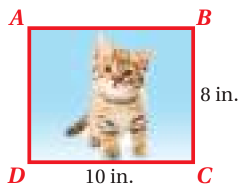
ومعامل تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle XYZ$ يساوي $\frac{6}{3}$ أو 2

بينما معامل تشابه $\triangle XYZ$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$

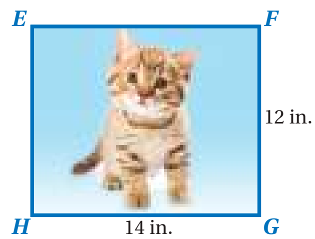
معامل التشابه بين مضلَّعَين متشابهين يسمى **نسبة التشابه** أحيانًا

مثال 2 من واقع الحياة — تحديد المضلعات المتشابهة

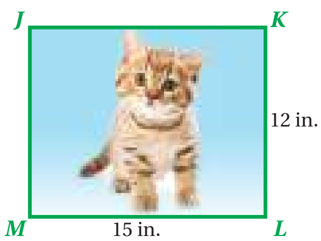
صور: يريد كمال أن يستعمل الصورة المستطيلة الشكل المجاورة خلفيّة لشاشة الحاسوب، ولكنه يحتاج لتغيير أبعادها، حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الصورتين المستطيلتين الآتيتين مشابهةً لها أم لا؟ وإذا كانت كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وضِّح إجابتك.



(a



(b



a) **الخطوة 1:** قارن الزوايا المتناظرة.

بما أن جميع زوايا المستطيل قوائم، والزوايا القوائم متطابقة، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{BC}{FG} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{DC}{HG} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

وحيث إن $\frac{5}{7} \neq \frac{2}{3}$، فإن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، وعليه فإنّ $ABCD \nsim EFGH$

إذن فالصورتان غير متشابهتين.

b) **الخطوة 1:** بما أنّ $ABCD$, $JKLM$ مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

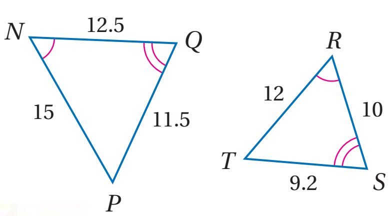
الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{BC}{KL} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{DC}{ML} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

وحيث إن $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة، وعليه فإن $ABCD \sim JKLM$؛ إذن فالصورتان متشابهتان ومعامل تشابه $ABCD$ إلى $JKLM$ يساوي $\frac{2}{3}$

تحقق من فهمك

2) حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



إرشادات للدراسة

تناسب المستطيلات: لاختبار تناسب أضلاع مستطيلين، يكفي اختبار تناسب ضلعين متتالين من المستطيل الأول مع الضلعين المناظرين لهما في المستطيل الثاني؛ لأن المستطيل فيه كلُّ ضلعين متقابلين متطابقان.

إرشادات للدراسة

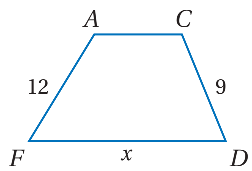
التحقق من صحة الحل: للتحقق من معامل التشابه، أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين آخرين.

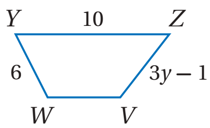
إرشادات للدراسة

التشابه والتطابق: إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين هي $1:1$.

استعمال الأشكال المتشابهة: يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات، لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة





في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.

a) أوجد قيمة x .

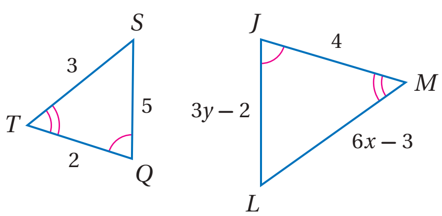
استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$	$CD = 9, WY = 6, DF = x, YZ = 10$
$9(10) = 6(x)$	خاصيّة الضرب التبادلي
$90 = 6x$	بالضرب
$15 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 6

b) أوجد قيمة y .

$\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{9}{6} = \frac{12}{3y-1}$	$CD = 9, WY = 6, FA = 12, ZV = 3y - 1$
$9(3y - 1) = 6(12)$	خاصيّة الضرب التبادلي
$27y - 9 = 72$	بالضرب
$27y = 81$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$y = 3$	بقسمة كلا الطرفين على 27

تحقق من فهمك



إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$، فأوجد قيمة المتغير في كلٍّ مما يأتي:

3A) x

3B) y

إرشادات للدراسة

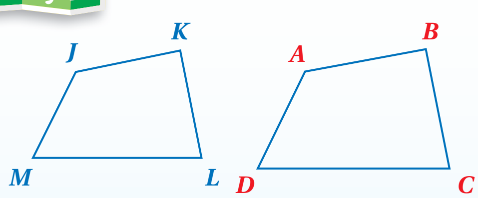
تحديد المثلثات المتشابهة: عندما تُعطى زوجين من الزوايا المتناظرة المتطابقة في مثلثين، تذكر أنّه يمكنك استعمال نظرية الزاوية الثالثة؛ لإثبات أن الزاويتين المتناظرتين الباقيتين متطابقتان أيضًا.

النسبة بين أيِّ طولين متناظرين في المضلعين المتشابهين تساوي معامل التشابه بينهما. ويؤدي هذا إلى النظرية الآتية حول محيطي المضلعين المتشابهين.

نظرية 2.1 محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



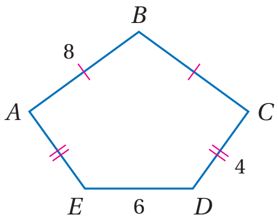
مثال: إذا كان $JKLM \sim ABCD$ ، فإنّ:

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

ستبرهن النظريّة 2.1 الخاصة بحالة المثلثات في السؤال 34

مثال 4 استعمال معامل التشابه لإيجاد المحيط

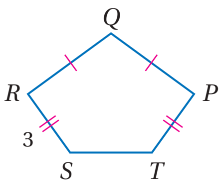
إذا كان $ABCDE \sim PQRST$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ ومحيط كل مضلّع.



معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ يساوي $\frac{CD}{RS}$ أي $\frac{4}{3}$.

وبما أنّ: $\overline{BC} \cong \overline{AB}, \overline{AE} \cong \overline{CD}$ ،

فإنّ محيط $ABCDE$ يساوي $4 + 6 + 4 + 8 + 8$ أي 30 .



استعمل محيط $ABCDE$ ، ومعامل التشابه لكتابة تناسب.

افترض أن محيط $PQRST$ يساوي x .

$\frac{\text{محيط } ABCDE}{\text{محيط } PQRST} = \frac{4}{3}$ النظرية 2.1

$\frac{30}{x} = \frac{4}{3}$ بالتعويض

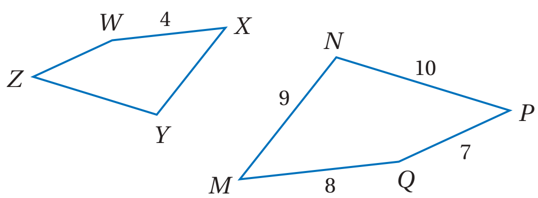
$(3)(30) = 4x$ خاصية الضرب التبادلي

$22.5 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 4

إذن محيط $PQRST$ يساوي 22.5 .

تحقق من فهمك

4) إذا كان $XYZW \sim MNPQ$ ، فأوجد معامل تشابه $MNPQ$ إلى $XYZW$ ، ومحيط كل مضلع.



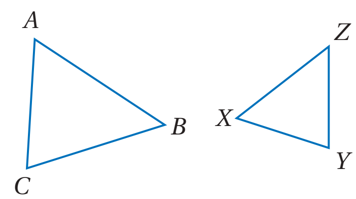
تنبيه !

المحيط: تذكّر أن المحيط هو المسافة حول الشكل، وعندما تُريد إيجاد محيط مضلع، احرص على أن تجد مجموع أطوال جميع أضلاعه، وقد تستعمل قوانين هندسيّة؛ لإيجاد أطوال الأضلاع غير المعطاة.

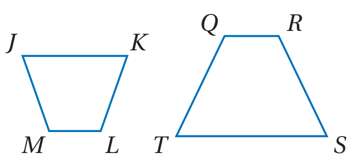
تأكـد

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$

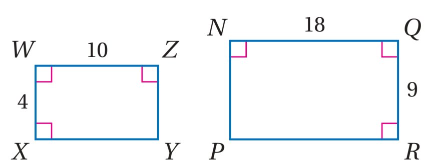


2) $JKLM \sim TSRQ$

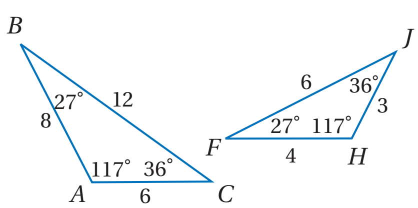


المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضِّح إجابتك.

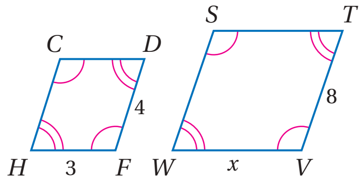
3)

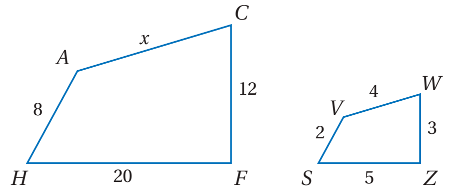


4)

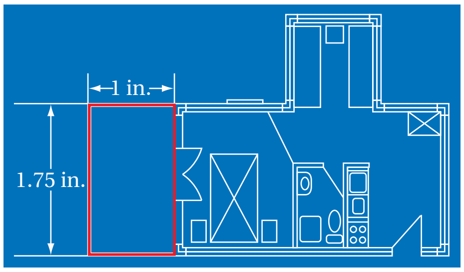


المثال 3 في كلٍّ ممّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

(5


(6


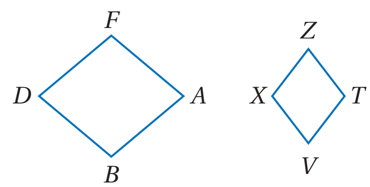
المثال 4 (7 **تصميم:** في مخطط الشقّة المجاور، عرض الشّرفة 1 in وطولها 1.75 in. إذا كان طول الشّرفة الحقيقي 15 ft، فما محيطها؟



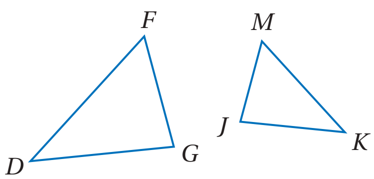
تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، ثم اكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممّا يأتي:

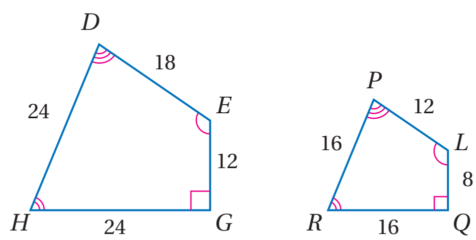
(8 $ABDF \sim VXZT$

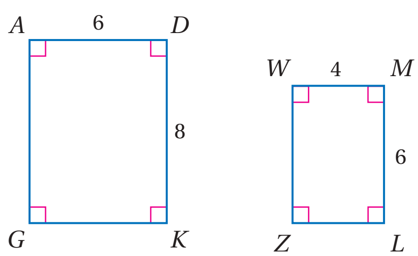


(9 $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$

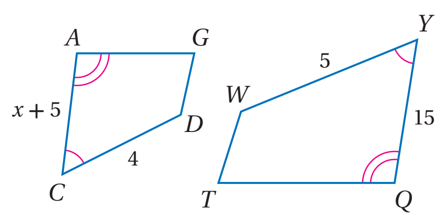


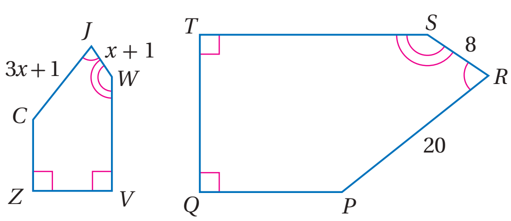
المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ ممّا يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

(10


(11


المثال 3 في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

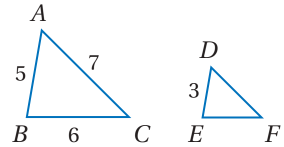
(12


(13


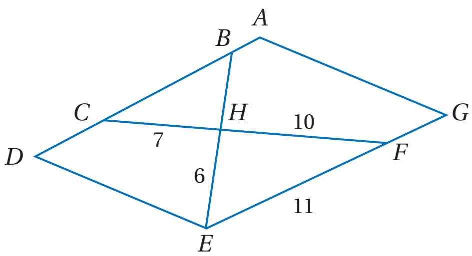
المثال 4 (14 طول المستطيل $ABCD$ يساوي 20 m، وعرضه 8 m. وطول المستطيل $QRST$ المشابه له يساوي 40 m. أوجد معامل تشابه المستطيل $ABCD$ إلى المستطيل $QRST$، ومحيط كل منهما.

أوجد محيط المثلث المحدّد في كلٍّ مما يأتي:

15) $\triangle DEF$، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



16) $\triangle CBH$، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$.

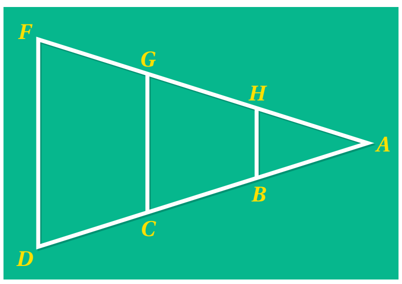


17) إذا كان معامل التشابه بين مستطيلين متشابهين 1:2، ومحيط المستطيل الكبير 80 m، فأوجد محيط المستطيل الصغير.

18) إذا كان معامل التشابه بين مربّعين متشابهين 3:2، ومحيط المربع الصغير 50 ft، فأوجد محيط المربع الكبير.

مثلثات متشابهة: في الشكل المجاور، المثلثات: AHB, AGC, AFD متشابهة وفيها: $\angle AHB \cong \angle AGC \cong \angle AFD$.

أوجد الأضلاع التي تناظر الضلع المُعطى أو الزوايا التي تطابق الزاوية المُعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية.



19) $\overline{AB}$

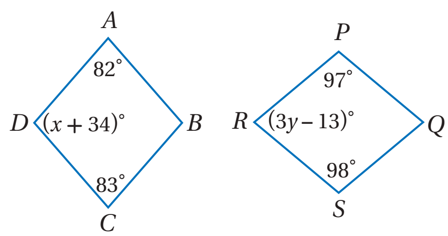
20) $\overline{FD}$

21) $\angle ACG$

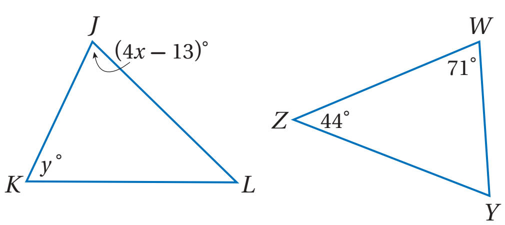
22) $\angle A$

أوجد قيمة كل متغيّر فيما يأتي:

23) $ABCD \sim QSRP$



24) $\triangle JKL \sim \triangle WYZ$



25) **عرض الشرائح:** إذا كانت أبعاد صورة على شريحة 13 in في $9\frac{1}{4}$ in، ومعامل تشابه صور الشريحة إلى الصور المعروضة بواسطة جهاز العرض 1:4؛ فما أبعاد الصورة المعروضة؟

الربط مع الحياة

يرى بعض التربويين أن نسبة %75 إلى %90 من معارف الشخص يتم الحصول عليها عن طريق الوسائل البصرية، ومن هنا جاءَت أهمية استعمال جهاز عرض الشرائح في العملية التعليمية.

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان المستطيلان $ABCD, WXYZ$ المعطاة إحداثيات رؤوسهما في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه؛ وضّح إجابتك.

26) $A(-1, 5), B(7, 5), C(7, -1), D(-1, -1); W(-2, 10), X(14, 10), Y(14, -2), Z(-2, -2)$

27) $A(5, 5), B(0, 0), C(5, -5), D(10, 0); W(1, 6), X(-3, 2), Y(2, -3), Z(6, 1)$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ مما يأتي متشابهين دائمًا أو أحيانًا أو غير متشابهين أبدًا، وضح إجابتك.

28) مثلثان منفرجا الزاوية

29) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

30) مثلثان قائما الزاوية

31) مثلثان متطابقا الضلعين

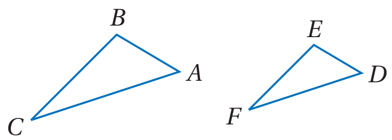
32) مثلث مختلف الأضلاع، ومثلث متطابق الضلعين

33) مثلثان متطابقا الأضلاع

34) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.1 (في حالة المثلثات)

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

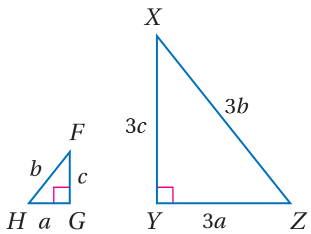
المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{m}{n}$



35) **تغيير الأبعاد:** في الشكل المجاور، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$

a) بيِّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أضلاعهما المتناظرة.

b) إذا أضيف لطول كل ضلع 6 وحداتٍ، فهل المثلثان الجديدان متشابهان؟



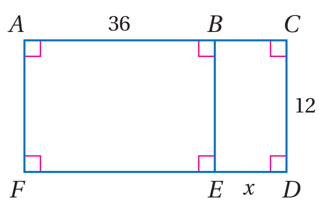
36) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف تشابه المربّعات.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مربّعات مختلفة الأبعاد، وسمِّها $ABCD, PQRS, WXYZ$، وقس طول ضلع كل مربّع وسّجل الأطوال على المربعات.

b) **جدوليًّا:** احسب النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لكل زوج مربعات فيما يأتي ودوّنها في جدول: $ABCD, PQRS; PQRS, WXYZ; WXYZ, ABCD$. هل كل مربعين من المربعات متشابهان؟

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول تشابه جميع المربّعات.

مسائل مهارات التفكير العليا



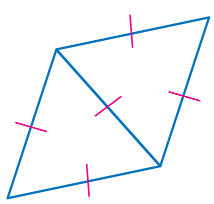
37) **تحدّ:** في الشكل المجاور، ما قيمة (قيم) x التي تجعل $BEFA \sim EDCB$ ؟

38) **إجابة مفتوحة:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية:

"جميع المستطيلات متشابهة"

39) **برهان:** إذا كان المستطيل $BCEG$ فيه: $BC : CE = 2:3$ ، وكان المستطيل $LJAW$ فيه: $LJ : JA = 2:3$ فأثبت أن: $BCEG \sim LJAW$

40) **تبرير:** يمكن دمج مثلثين متساويَي الأضلاع متطابقين؛ لتكوينِ شكل رباعي كما في الشكل المجاور. إذا كوّنت شكلًا رباعيًّا آخر من مثلثين متساويَي الأضلاع متطابقين آخرين، فأيُّ العبارات التالية صحيحة حول الشكل المجاور، والشكل الذي كوّنته: يجب أن يكونا متشابهين، المجاور قد يكونا متشابهين، أو غير متشابهين. فسّر إجابتك.



41) **تبرير:** ارسم مضلعين خماسيَّين منتظمين أطوال أضلاعهما مختلفة. هل المضلعان متشابهان؟ وهل كل مضلعين منتظمين ومتساوِيَين في عدد الأضلاع متشابهان؟ وضح إجابتك.

42) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المضلعات المتطابقة والمضلعات المتشابهة.

تدريب على اختبار

43) إذا كان: $PQRS \cong JKLM$ ومعامل تشابه $PQRS$ إلى $JKLM$ يساوي 4:3 ، وكان $QR = 8\,cm$ فما طول KL؟

A 24 cm　　**C** 8 cm

B $10\frac{2}{3}$ cm　　**D** 6 cm

44) مستطيلان متشابهان. إذا كان معامل التشابه بينهما 3:5، ومحيط المستطيل الكبير 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير؟

A 29 m　　**C** 49 m

B 39 m　　**D** 59 m

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

45) $\frac{5}{4} = \frac{c-2}{c+3}$　　**46)** $\frac{-4}{y} = \frac{2}{4y+5}$　　**47)** $\frac{-4}{5} = \frac{2x+3}{x-1}$

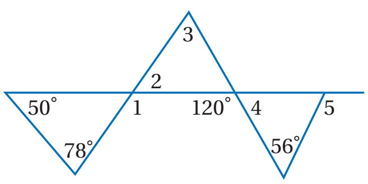
48) **هندسة إحداثية** أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square JKLM$ الذي رؤوسه: $J(2, 5), K(6, 6), L(4, 0), M(0, -1)$. (الدرس 2-2)

اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

49) إذا كان $3x > 12$ ، فإن $x > 4$.　　**50)** $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$

51) منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين هو ارتفاع للمثلث أيضًا.

في الشكل المجاور، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية. (مهارة سابقة)



52) $m\angle 1$

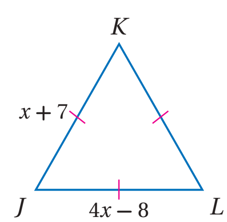
53) $m\angle 2$

54) $m\angle 3$

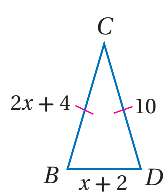
استعد للدرس اللاحق

جبر أوجد قيمة x وطول كل ضلع في كلٍّ من المثلثين الآتيين: (مهارة سابقة)

55)



56)



2-2

المثلثات المتشابهة
Similar Triangles

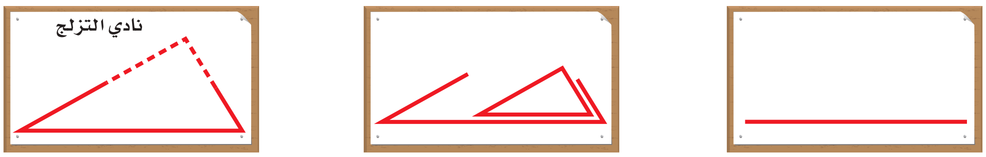
www.ien.edu.sa
رابط الدرس الرقمي

فيما سبق:
درستُ استعمال المسلَّمتين SSS, SAS والنظرية AAS لإثبات تطابق مثلثين.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أُحدّد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريتَي التشابه SSS, SAS .
- أستعمل المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

لماذا؟
أراد خالد أن يرسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلُّج المجاور على مُلصق كبير، فبدأ أولًا برسم قطعة مستقيمة أسفل المُلصق، ثم استعمل نسخةً من المثلث الأصلي لينسخ زاويتَي القاعدة، ثم مدّ الضلعين غير المشتركين للزاويتين.



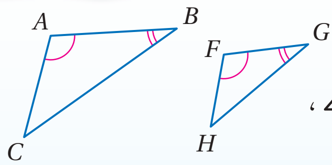
تحديد المثلثات المتشابهة: في الفصل الثالث تعلمت اختبارات تحديد ما إذا كان مثلثان متطابقين أم لا، ولتشابه المثلثات اختبارات أيضًا. والرسم السابق يبيّن أنه إذا طابقت زاويتان في مثلثٍ زاويتين في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متشابهان.

مسلمة 2.1 التشابه بزاويتين (AA)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.

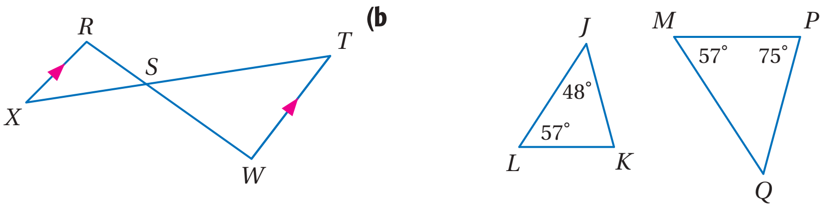
مثال: في المثلثين ABC , FGH ، إذا كانت: $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle G$ ، فإن: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.



مثال 1 استعمال مسلمة التشابه AA

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.

a) b)

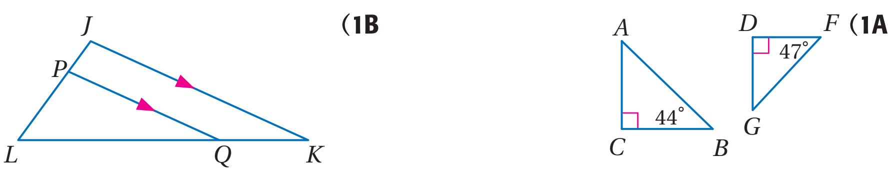


a) بما أنّ: $m\angle L = m\angle M$، إذن: $\angle L \cong \angle M$. ومن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون: $57° + 48° + m\angle K = 180°$؛ إذن $m\angle K = 75°$. وبما أنّ $m\angle P = 75°$ ، فإن $\angle K \cong \angle P$ ؛ إذن $\triangle LJK \sim \triangle MQP$ وفق المسلمة AA .

b) $\angle RSX \cong \angle WST$ وفق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس. ولأن $\overline{RX} \parallel \overline{TW}$، فإنّ $\angle R \cong \angle W$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ إذن $\triangle RSX \sim \triangle WST$ وفق المسلمة AA .

✓ **تحقق من فهمك:** حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ووضّح إجابتك.

1A) 1B)



إرشادات للدراسة

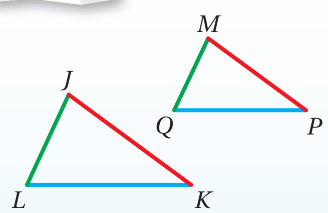
رسم الأشكال: قد تساعدك إعادة رسم المثلثين المتشابهين، بحيث تظهر الأضلاع المتناظرة في الاتجاه نفسه.

يمكنك استعمال مسلمة التشابه AA لإثبات النظريتين الآتيتين:

نظريتان

أضف إلى مطويتك

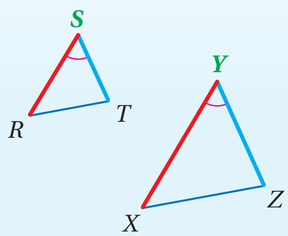
2.2 التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)



إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان: $\frac{JK}{MP} = \frac{KL}{PQ} = \frac{LJ}{QM}$ ، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.

2.3 التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)



إذا كان طولا ضلعين في مثلث ما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين، فإنّ المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان $\angle S \cong \angle Y$, $\frac{RS}{XY} = \frac{ST}{YZ}$ ، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

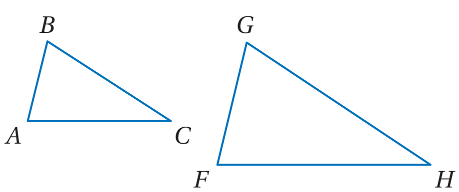
ستبرهن النظرية 2.3 في السؤال 17

برهان النظرية 2.2

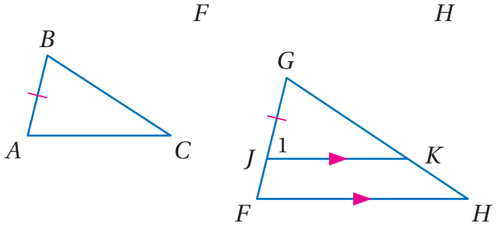
اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.2

المعطيات: $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$



البرهان:



عيّن النقطة J على $\overline{FG}$ ، بحيث يكون $JG = AB$.

ارسم $\overline{JK}$ ، بحيث يكون $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$.

سمِّ $\angle GJK$ بالرمز $\angle 1$.

بما أنّ $\angle G \cong \angle G$ وفق خاصية الانعكاس،

و $\angle F \cong \angle 1$ وفق مسلمة الزاويتين المتناظرتين،

فإنّ $\triangle GFH \sim \triangle GJK$ وفق مسلمة التشابه AA .

ومن تعريف المضلعات المتشابهة يكون: $\frac{JK}{FH} = \frac{GK}{GH} = \frac{JG}{FG}$.

وبالتعويض ينتج أن: $\frac{JK}{FH} = \frac{GK}{GH} = \frac{AB}{FG}$.

وبما أن: $\frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = \frac{AB}{FG}$ ، إذن يمكننا استنتاج أنّ: $\frac{AC}{FH} = \frac{JK}{FH}$, $\frac{BC}{GH} = \frac{GK}{GH}$ ، وهذا يعني أن:

$JK = AC$, $GK = BC$ ، لذلك $\overline{JK} \cong \overline{AC}$, $\overline{GK} \cong \overline{BC}$.

ومن مسلّمة التطابق SSS ، يكون $\triangle ABC \cong \triangle JGK$.

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle A \cong \angle 1$, $\angle B \cong \angle G$ ، وبما أن: $\angle F \cong \angle 1$ ؛ إذن $\angle A \cong \angle F$ وفق خاصيّة التعدّي؛ إذن ومن مسلمة التشابه AA ، يكون $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

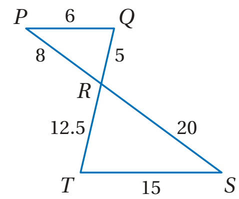
إرشادات للدراسة

الأضلاع المتناظرة: لتحديد الأضلاع المتناظرة لمثلثين، ابدأ بمقارنة أطول ضلعين ثم الضلعين التاليين لهما طولًا وأخيرًا أقصر ضلعين.

مثال 2 استعمال نظريتَي التشابه SSS , SAS

حدّد في كلٍّ مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، و وضّح إجابتك.

a)

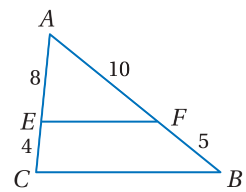


$\frac{PR}{SR} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ، $\frac{PQ}{ST} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{QR}{TR} = \frac{5}{12.5} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$ ؛

إذن $\triangle PQR \sim \triangle STR$ وفق نظرية التشابه SSS .

b)



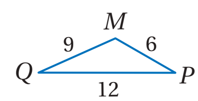
من خاصية الانعكاس $\angle A \cong \angle A$.

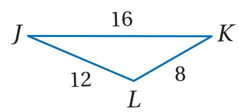
$\frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{AF}{AB} = \frac{10}{10+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

بما أن طولَي الضلعين اللذين يحصران $\angle A$ في $\triangle AEF$ متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في $\triangle ACB$ ، إذن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ وفق نظرية التشابه SAS .

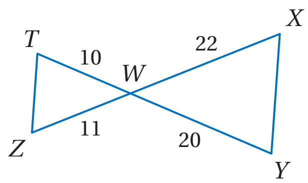
✓ تحقق من فهمك

2A)





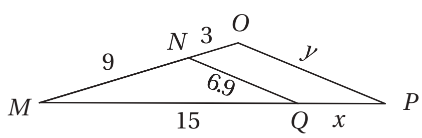
2B)



يمكنك أن تُقرّر أي الشروط كافية لإثبات تشابه مثلثين.

مثال 3 من اختبار

المثلثان MNQ, MOP في الشكل المجاور متشابهان، ماقيمة x؟



A 12 **C** 5

B 10 **D** 4

اقرأ سؤال الاختبار

في هذا السؤال تعلمْ، أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، ومطلوب منك إيجاد طول قطعة مجهولة.

حُل سؤال الاختبار

بما أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة أي أن $\frac{MQ}{MP} = \frac{MN}{MO}$ ، وبما أن

$MN = 9, MO = 12, MQ = 15, MP = 15 + x$

اختبر كلًّا من بدائل الإجابة حتى تجد واحدًا منها يحقق التناسب $\frac{15}{15+x} = \frac{9}{12}$:

البديل A: إذا كان: $x = 12$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+12}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{5}{9}$ ✗ غير صحيح

البديل B: إذا كان: $x = 10$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+10}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{3}{5}$ ✗ غير صحيح

البديل C: إذا كان: $x = 5$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+5}$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓ صحيح، إذن فإن إجابة السؤال هي C

تحقق من فهمك

3) في المثال السابق، ماقيمة y ؟

A 5.2 **B** 8.4 **C** 9.2 **D** 20.7

استعمال المثلثات المتشابهة : تشابه المثلثات مثل تطابق المثلثات، يحقق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي.

نظرية 2.4 خصائص المثلثات المتشابهة

أضف إلى مطويتك

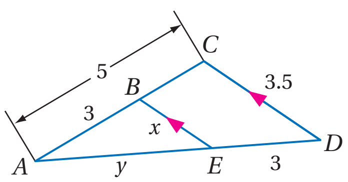
خاصيّة الانعكاس للتشابه : $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

خاصيّة التماثل للتشابه : إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، فإن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتشابه : إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF,\ \triangle DEF \sim \triangle XYZ$
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

ستبرهن النظرية 2.4 في السؤال 18

مثال 4 أجزاء المثلثات المتشابهة



أوجد طول BE, AD في الشكل المجاور.

بما أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن: $\angle ABE \cong \angle ACD,\ \angle AEB \cong \angle ADC$ ؛ لأنّها زوايا متناظرة، ومن مسلمة التشابه AA ، يكون $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$	تعريف المضلعات المتشابهة
$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$	$AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$
$(3.5) \cdot 3 = 5 \cdot x$	خاصية الضرب التبادلي
$2.1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 5

وعليه فإن BE يساوي 2.1

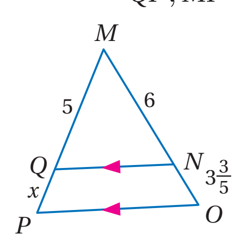
$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$	تعريف المضلعات المتشابهة
$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$	$AC = 5, AB = 3, AD = y + 3, AE = y$
$5 \cdot y = 3(y + 3)$	خاصية الضرب التبادلي
$5y = 3y + 9$	خاصية التوزيع
$2y = 9$	بطرح $3y$ من كلا الطرفين
$y = 4.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

وعليه فإن: $AD = y + 3 = 7.5$

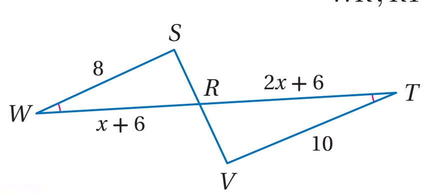
تحقق من فهمك

أوجد كل طولٍ فيما يأتي.

4A) QP, MP



4B) WR, RT



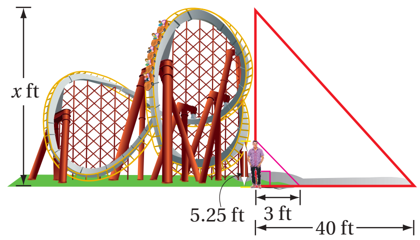
مثال 5 من واقع الحياة — القياس غير المباشر

أفعوانية: يريد تركي أن يقدِّر ارتفاع الأفعوانية في مدينة الألعاب، فلاحظ أنه عندما كان طول ظله 3 ft ، كان طول ظل الأفعوانية 40 ft . إذا كان طول تركي 5 ft و 3 in ، فكم قدمًا ارتفاع الأفعوانية؟

افهم: **المعطيات:** طول ظل تركي 3 ft ، وطول ظل الأفعوانية 40 ft ، وطول تركي 5 ft وَ 3 in

المطلوب: ارتفاع الأفعوانية.

ارسم مخططًا توضيحيًّا. 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft



خطط: في مسائل الظل، افترض أنّ الزاويتين المتكونتين من شعاعَي الشمس وأيّ جسمين رأسيين تكونان متطابقتين، وأن المثلث المتشكّل من الجسم والأرض وشعاع الشمس المارِّ بقمة الجسم قائم الزاوية، وبما أن هناك زوجين من الزوايا المتطابقة، فإنّ المثلثين القائِمَي الزاوية متشابهان وفق مسلمة التشابه AA ؛ إذن يمكن كتابة التناسب الآتي:

$$\frac{\text{طول ظل تركي}}{\text{طول ظل الأفعوانية}} = \frac{\text{طول تركي}}{\text{ارتفاع الأفعوانية}}$$

حل: افترض أن ارتفاع الأفعوانية يساوي x وعوِّض القيم المعلومة.

$\frac{3}{40} = \frac{5.25}{x}$	بالتعويض
$3 \cdot x = 40(5.25)$	خاصّية الضرب التبادلي
$3x = 210$	بالضرب
$x = 70$	بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن ارتفاع الأفعوانية يساوي 70 ft .

تحقق: طول ظل الأفعوانية يساوي 13.3 مرةً تقريبًا من طول ظل تركي. تحقق لترى ما إذا كان ارتفاع الأفعوانية يساوي $\frac{40}{3} \approx 13.3$ مرّة من طول تركي، $\frac{70\text{ ft}}{5.25\text{ ft}} \approx 13.3$ ✓

✓ تحقق من فهمك

5) **بنايات:** يقف منصور بجوار بناية، وعندما كان طول ظلّه 9 ft ، كان طول ظل البناية 322.5 ft .
إذا كان طول منصور 6 ft ، فكم قدمًا ارتفاع البناية؟

إرشادات للدراسة

تحويل الوحدات:

$12\text{ in} = 1\text{ ft}$

$3\text{ in} = \frac{3}{12}\text{ ft}$

$= 0.25\text{ ft}$

أي أن 5 ft وَ 3 in تساوي 5.25 ft

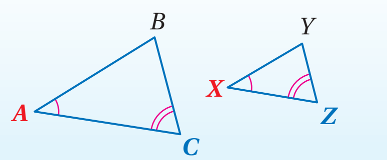
إرشادات لحل المسألة

حدِّد الإجابات المعقولة: عندما تحل مسألة، تحقق من معقوليّة إجابتك. في هذا المثال، طول ظل تركي أكبر بقليل من نصف طوله، وكذلك طول ظل الأفعوانية أكبر من نصف ارتفاعها بقليل؛ لذا فالإجابة معقولة.

ملخص المفهوم — تشابه المثلثات

أضف إلى مطويتك

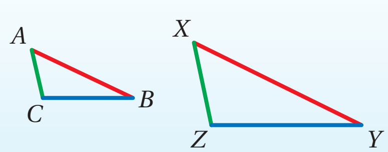
مسلمة التشابه AA



إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

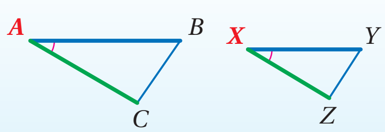
نظرية التشابه SSS



إذا كانت: $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

نظرية التشابه SAS

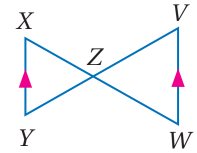


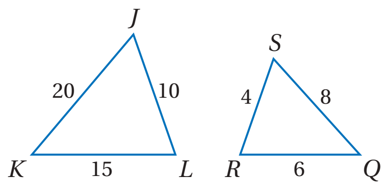
إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX}$

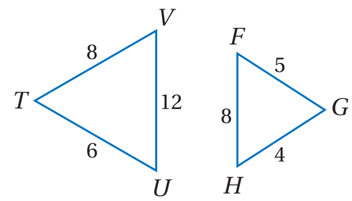
فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

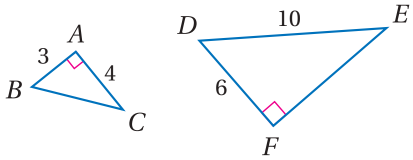
تأكـد

المثالان 1, 2 في كلٍّ ممّا يأتي حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

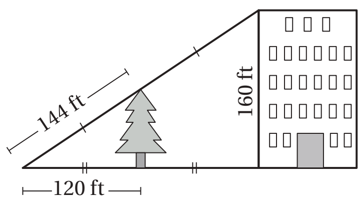
(1


(2


(3


(4


المثال 3 (5 **اختيار من متعدّد:** استعمل الشكل أدناه في إيجاد ارتفاع الشجرة؟



A 264 ft

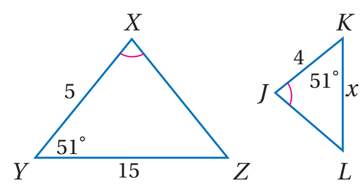
B 60 ft

C 72 ft

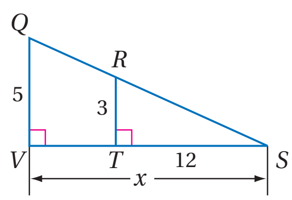
D 80 ft

المثال 4 **جبر:** أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(6 KL



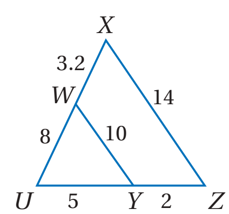
(7 VS

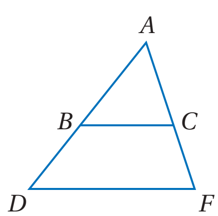


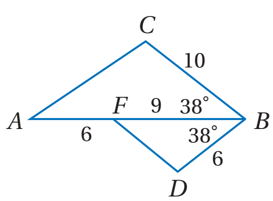
المثال 5 (8 **اتّصالات:** طول ظلّ برج اتصالاتٍ في لحظةٍ معينةٍ 100 ft ، وبجواره لوحة تحذيرية مثبَّتة على عمودٍ طول ظله في اللحظة ذاتها 3 ft و 4 in ، إذا كان ارتفاع عمود اللوحة 4 ft و 6 in ، فما ارتفاع البرج؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 في كلٍّ ممّا يأتي، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وإلّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ ووضّح إجابتك.

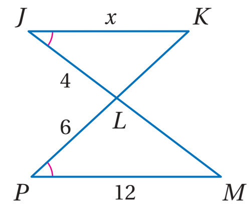
(9


(10


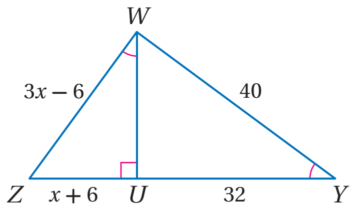
(11


المثال 4 **جبر:** أوجد الطول المطلوب في كلٍّ مما يأتي:

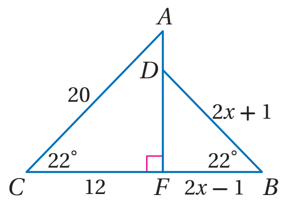
12) JK



13) WZ, UZ



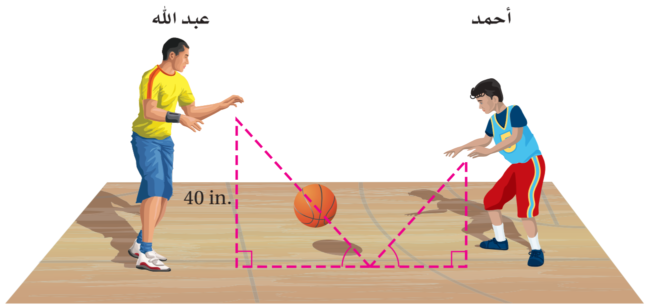
14) DB, CB



المثال 5

15) **رياضة:** يقف أيمن بجوار مرمى كرة السلّة. إذا كان طول أيمن 5 ft و 11 in، وطول ظلّه 2 ft، وكان طول ظل مرمى كرة السلّة في اللحظة ذاتها 4 ft و 4 in، فما ارتفاع المرمى تقريبًا؟

16) **رياضة:** رمى عبد الله الكرة لترتدّ نحو أحمد، فارتطمت بسطح الأرض على بُعد $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما، وكانت الزاويتان الناتجتان عن مسار الكرة وسطح الأرض متطابقتين. إذا رمى عبدالله الكرة من ارتفاع 40 in عن سطح الأرض، فعلى أيّ ارتفاعٍ سيلتقطها أحمد؟



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ ممّا يأتي:

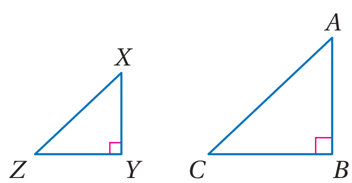
17) النظريّة 2.3

18) النظريّة 2.4

19) **المعطيات:** $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ قائما الزاوية

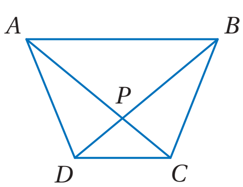
$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$

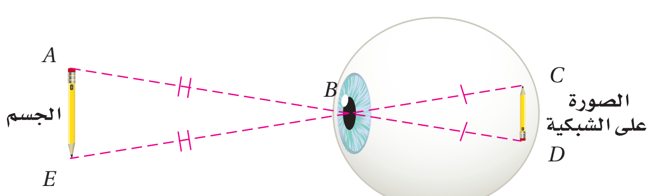


20) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف.

المطلوب: إثبات أن $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$



21) **رؤية:** عندما ننظر إلى جسم، فإن صورته تُسْقَطُ على الشبكيّة عبر البؤبؤ، وتكون المسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الجسم وأسفله متساويتين، والمسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الصورة وأسفلها على الشبكية متساويتين أيضًا. هل المثلثان المتكوّنان بين الجسم والبؤبؤ وبين البؤبؤ والصورة متشابهان؟ وضّح إجابتك.



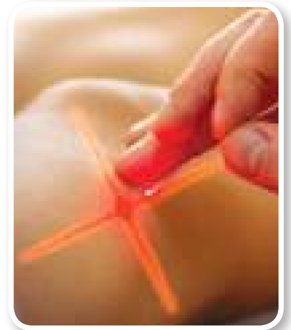
الربط مع الحياة

يحدث قصر النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء أمام الشبكية، ويحدث طول النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء خلف الشبكية.

هندسة إحداثيّة: إحداثيات رؤوس المثلثين $\triangle XYZ, \triangle WYV$ هي:
$X(-1,-9), Y(5,3), Z(-1,6), W(1,-5), V(1,5)$.

22) مثّل المثلثين بيانيًّا، وأثبت أنّ $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$.

23) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين.

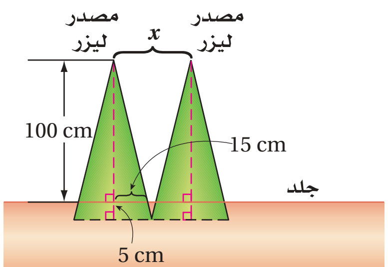


الربط مع الحياة

في بعض العلاجات الطبيّة تستعمل أشعة الليزر التي تلامس الجلد وتخترقه مكوّنة مثلثات متشابهة.

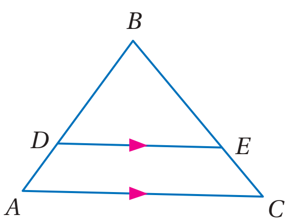
24) **قياس:** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. وطول كل ضلع في $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر له في $\triangle ABC$ ، ومساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\,in^2$ ، فما مساحة $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين مساحتي $\triangle ABC$ ، $\triangle JKL$ ، ومعامل التشابه بينهما؟

25) **علاج:** استعمل معلومات الربط بالحياة والشكل المجاور لإيجاد المسافة التي يجب أن تفصل بين مصدري أشعة الليزر حتى تكون المنطقتان المعالجتان المتطابقتان بكلٍّ من المصدرين غير متداخلتين.



26) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستستقصي الأجزاء المتناسبة في مثلث.

a) **هندسيًّا:** ارسم $\triangle ABC$ وارسم $\overline{DE}$ ، بحيث تكون موازيةً لـ $\overline{AC}$ كما في الشكل المجاور.



b) **جدوليًّا:** قس الأطوال AD, DB, CE, EB وسجِّلها في جدول، وأوجد النسبتين $\frac{AD}{DB}$, $\frac{CE}{EB}$ وسجّلهما في الجدول نفسه.

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين.

مسائل مهارات التفكير العليا

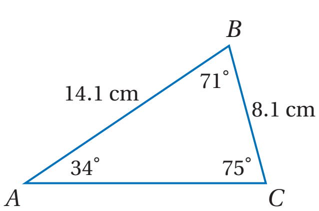
27) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلمة التشابه AA ، ونظرية التشابه SSS ، ونظرية التشابه SAS .

تحدٍّ: إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هي: 2:3:4 ومحيطه 54 in ، فأجب عما يأتي:

28) إذا كان طول أصغر أضلاع مثلثٍ آخر مشابه هو: 16 in ، فما طول كلٍّ من الضلعين الآخرين فيه؟

29) قارن النسبة بين محيطَي المثلثين ومعامل التشابه بينهما. ماذا تلاحظ؟

30) **تبرير:** قياسات زوايا مثلثين متشابهين هي: $50°, 85°, 45°$. وأطوال أضلاع أحدهما 3, 4, 5.2 وحدات، وأطوال أضلاع المثلث الآخر $x, x-1.5, x+1.8$ وحدة، أوجد قيمة x .

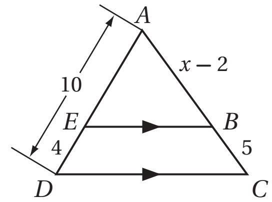


31) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا مشابهًا لـ $\triangle ABC$ المجاور، ووضّح كيف تعرف أنّهما متشابهان.

32) **اكتب:** اشرح طريقة يمكنك استعمالها لرسم مثلث يشابه مثلثًا معلومًا، وأطوال أضلاعه ضعف أطوال أضلاع المثلث المعلوم.

تدريب على الاختبار المعياري

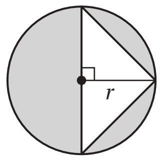
33) إجابة مطوّلة: في الشكل أدناه $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$.



a) اكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد قيمة x.

b) أوجد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

34) جبر: أيٌّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟



A πr^2

B $\pi r^2 + r^2$

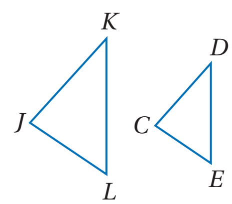
C $\pi r^2 + r$

D $\pi r^2 - r^2$

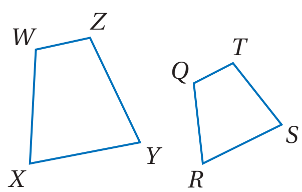
مراجعة تراكمية

اكتب جميع الزوايا المتطابقة ثم اكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 1-2)

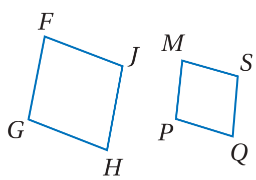
35) $\triangle JKL \sim \triangle CDE$



36) $WXYZ \sim QRST$



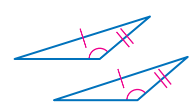
37) $FGHJ \sim MPQS$



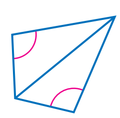
38) **القطع الهندسية السبع:** تتكون مجموعة القطع الهندسية السبع (Tangram) في الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلث قائم الزاوية متوسط المقاس، وشكل رباعي. كيف يمكنك أن تتحقق من أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك. (الدرس 3-1)

حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها؛ لإثبات تطابق المثلثين في كلٍّ ممَّا يأتي، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق. (مهارة سابقة)

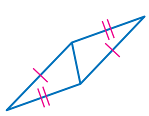
39)



40)



41)



استعد للدرس اللاحق

حل كل تناسبٍ ممَّا يأتي:

42) $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$

43) $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$

44) $\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$

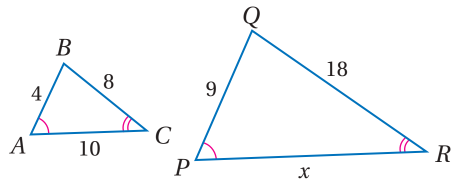
45) $\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$

اختبار منتصف الفصل

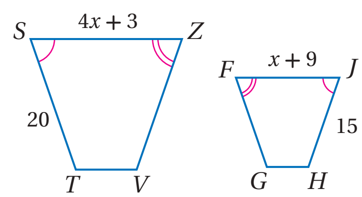
الدرسان 1-2 و 2-2

إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين، فأوجد قيمة x. (الدرس 1-2)

1)



2)



3) **اختيار من متعدّد:** إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km، فما المسافة الحقيقية بينهما؟ (الدرس 1-2)

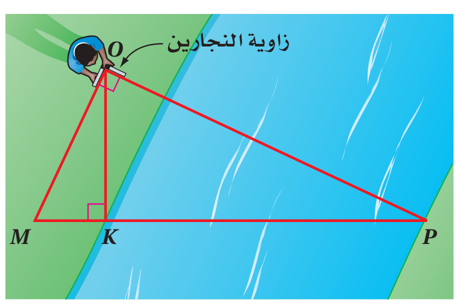
A 1211 km

B 964 km

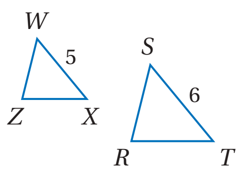
C 1176 km

D 1031 km

4) **قياس:** يستعمل عبدالله زاوية النجارين لحساب KP عبر النهر كما في الشكل أدناه، إذا كان: $OK = 4.5\,\text{ft}$, $MK = 1.5\,\text{ft}$، فأوجد المسافة KP عبر النهر. (الدرس 2-2)

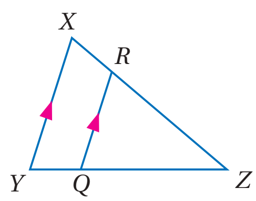


5) إذا كان: $\triangle WZX \sim \triangle SRT$، $ST = 6$, $WX = 5$، فأوجد محيط $\triangle WZX$ إذا كان محيط $\triangle SRT$ يساوي 18 وحدة. (الدرس 1-2)

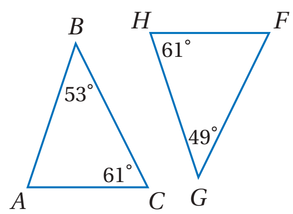


حدّد ما إذا كان المثلثان في السؤالين **6, 7** متشابهين أم لا، وإذا كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه. وإلّا فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، وضح إجابتك. (الدرس 2-2)

6)

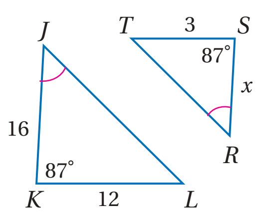


7)

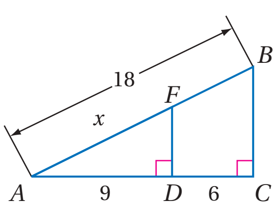


جبر أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-2)

8) SR



9) AF



2-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة
Parallel Lines and Proportional Parts

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.

(الدرس 2-2)

والآن:

- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.

المفردات:

القطعة المنصفة في المثلث
midsegment of a triangle

لماذا؟

يستعمل رسّامو الصور المتحركة طرائق عدّة؛ لإضفاء خداع بصري على أعمالهم. كما يستعملون في الرسومات الثلاثية الأبعاد حقيقة كون الأجسام البعيدة تبدو أصغر من الأجسام القريبة إلى المشاهد. ولتحقيق هذا الخداع، يستعمل الرسّامون نظرية التناسب في المثلث.

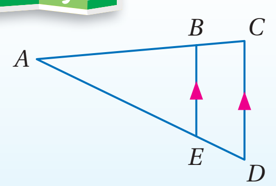
الأجزاء المتناسبة في المثلث: عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، فإنّه يمكن إثبات أن المثلثين الناتجين متشابهان، وذلك باستعمال مسلمة التشابه AA، وبما أن المثلثين متشابهان، فإنّ أطوال أضلاعهما متناسبة.

نظريّة 2.5 نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنّه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.

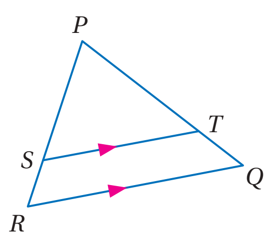
مثال: إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.



ستبرهن النظريّة 2.5 في السؤال 21

مثال 1 إيجاد طول ضلع

في $\triangle PQR$ ، إذا كان: $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}, PT = 7.5, TQ = 3, SR = 2.5$ ، فأوجد PS .



استعمل نظريّة التناسب في المثلث.

$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$	نظرية التناسب في المثلث
$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$	بالتعويض
$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$	خاصية الضرب التبادلي
$3PS = 18.75$	بالضرب
$PS = 6.25$	بقسمة كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

1) في الشكل أعلاه، إذا كان: $PT = 15$ ، $SR = 5$ ، $PS = 12.5$ ، فأوجد TQ .

إرشادات للدراسة

التوازي: إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين، فإن القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{CD}$ متوازيتان؛ لأنهما جزء من المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ على الترتيب. أي أنه إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

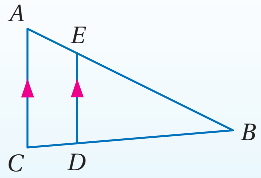
وعكس النظرّية 2.5 صحيح أيضًا، ويمكن إثباته باستعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث ونظرية التشابه SAS .

نظريّة 2.6 عكس نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

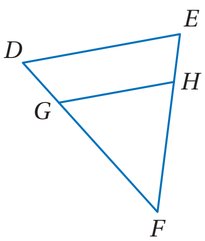
مثال: إذا كان $\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$.



ستبرهن النظرية 2.6 في السؤال 22

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين

في $\triangle DEF$ إذا كان: $DG=\frac{1}{3}GF, EH=3, HF=9$ ، فهل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$؟ وضح إجابتك.



يتعين عليك إثبات أنّ $\frac{DG}{GF}=\frac{EH}{HF}$ ، وذلك باستعمال عكس نظرية التناسب في المثلث.

$DG=\frac{1}{3}GF$ معطى

$\frac{DG}{GF}=\frac{1}{3}$ بقسمة كلا الطرفين على GF

$\frac{EH}{HF}=\frac{3}{9}$ بالتعويض $EH=3$ ، $HF=9$

$=\frac{1}{3}$ بالتبسيط

وبما أن:

$$\frac{DG}{GF}=\frac{EH}{HF}=\frac{1}{3}$$

بحسب عكس نظرية التناسب في المثلث، تكون $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$

تحقق من فهمك

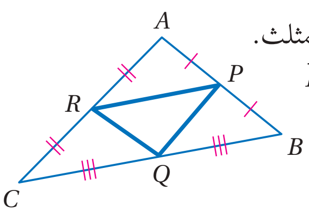
2) في الشكل أعلاه، إذا كان: $DG=\frac{1}{2}GF, EH=6, HF=10$ ، فهل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$ ؟

إرشادات للدراسة

مثلث القطع المنصفة: القطع المنصفة الثلاث في المثلث تشكل مثلثًا يُسمى مثلث القطع المنصّفة.

القطعة المنصّفة في المثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث. وفي كل مثلث ثلاث قطع منصّفة. فالقطع المنصّفة في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}, \overline{PQ}, \overline{RQ}$

ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث هي حالة خاصّة من عكس نظرية التناسب في المثلث.

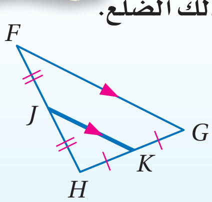


نظريّة 2.7 نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث

أضف إلى مطويتك

القطعة المنصفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

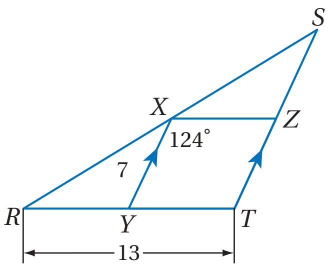
مثال: إذا كانت J, K نقطتَي منتصف $\overline{FH}, \overline{HG}$ على الترتيب، فإن: $\overline{JK} \parallel \overline{FG}, JK=\frac{1}{2}FG$.



ستبرهن النظرية 2.7 في السؤال 23

مثال 3 استعمال نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث

في $\triangle RST$ ، إذا كانت $\overline{XZ}, \overline{XY}$ قطعتين منصّفتين، فأوجد كل قياس مما يأتي:



a) XZ

$XZ = \frac{1}{2}RT$	نظرية القطعة المنصّفة في المثلث
$XZ = \frac{1}{2}(13)$	بالتعويض
$XZ = 6.5$	بالتبسيط

b) ST

$XY = \frac{1}{2}ST$	نظرية القطعة المنصّفة في المثلث
$7 = \frac{1}{2}ST$	بالتعويض
$14 = ST$	بضرب كلا الطرفين في 2

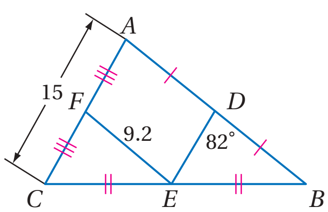
c) $m\angle RYX$

$\overline{XZ}$ قطعة منصفة في $\triangle RST$ ، إذن $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

$\angle RYX \cong \angle YXZ$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle RYX = m\angle YXZ$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle RYX = 124°$	بالتعويض

تحقق من فهمك

أوجد كل قياس مما يأتي معتمدًا على الشكل المجاور:



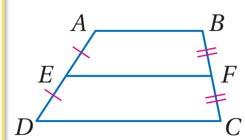
3A) DE

3B) DB

3C) $m\angle FED$

إرشادات للدراسة

القطعة المنصّفة: نظريةُ القطعة المنصّفة في المثلث، تشبه نظريّة القطعة المنصّفة في شبه المنحرف، والتي تنصّ على أن القطعة المنصّفة في شبه المنحرف توازي القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولَي القاعدتين.

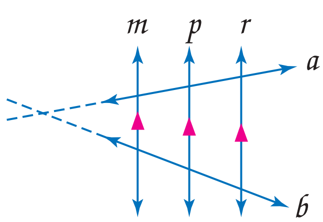


$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

هناك حالة خاصّة أخرى لنظرية التناسب في المثلث تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، يقطعها قاطعان. لاحظ أنّه إذا مُدَّ القاطعان a, b ، فإنّهما يصنعان ثلاثة مثلثاتٍ لها ثلاثة أضلاع متوازية.

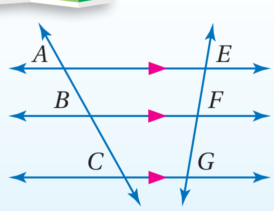


نتيجة 2.1 الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

مثال: إذا كان: $\overline{CG} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{AE}$ ، وكان $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{AC}$ قاطعان لها، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.



ستبرهن النتيجة 2.1 في السؤال 19

إرشادات للدراسة

تناسبات أخرى: في النتيجة 2.1 ، يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال:

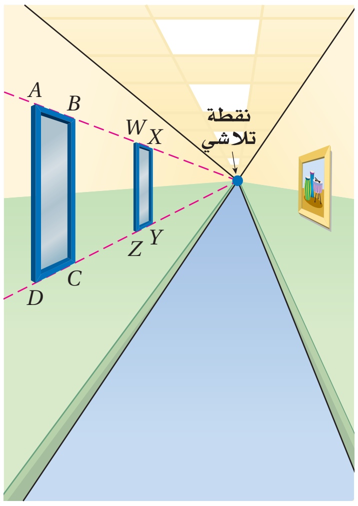
$\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}, \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

الربط مع الحياة

يستعمل الرسامون إيحاءات إدراكيّة متنوعة، تجعل الرسم الثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد منها:

- الحجم: تبدو الأشياء البعيدة أصغر حجمًا.
- الوضوح: تبدو الأجسام القريبة أكثر وضوحًا.
- التفاصيل: تتضمن الأجسام القريبة تفاصيل دقيقة، في حين تتضمن الأجسام البعيدة معالم عامّة.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطع المتناسبة من قاطعين



رسم: ترسم مريم ممرًّا في منظورٍ ذي نقطة تلاشٍ واحدة، فاستعملت مريم الخطوط الإرشادية المبيّنة؛ لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة: $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{WZ}, \overline{XY}$ متوازية، وكان: $AB = 8\text{ cm}, DC = 9\text{ cm}, ZY = 5\text{ cm}$، فأوجد WX.

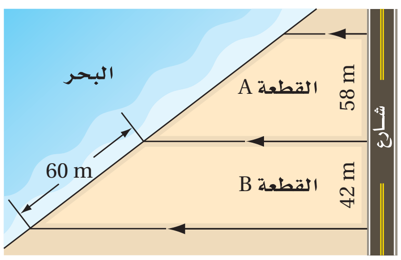
بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$، إذن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$ وفق النتيجة 2.1.

$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$	النتيجة 2.1
$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$	بالتعويض
$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$	خاصيّة الضرب التبادلي
$9WX = 40$	بالتبسيط
$WX = \frac{40}{9} \approx 4.4\text{ cm}$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق: نسبة DC إلى ZY هي 9 إلى 5، وهي تقريبًا 10 إلى 5 أو 2 إلى 1. وكذلك نسبة AB إلى WX هي 8 إلى 4.4 وهي تقريبًا 8 إلى 4 أو 2 إلى 1؛ إذن الإجابة معقولة. ✓

تحقق من فهمك

4) **عقارات:** واجهة قطعة الأرض هي طول حدّها المحاذي لمعلَم ما مثل شارع أو بحر أو نهر، أوجد طول الواجهة البحرية للقطعة A إلى أقرب عُشر المتر.



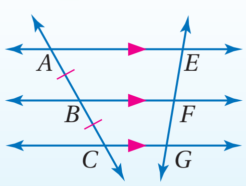
إذا كانت النسبة بين أطوال أجزاء القاطعين تساوي 1، فإن المستقيمات المتوازية تقطع أجزاءً متطابقة من القاطعين.

نتيجة 2.2 — الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك

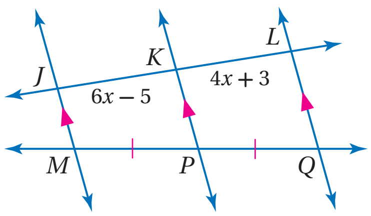
إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة،فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.

مثال: إذا كان: $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG}$، وكان $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{EG}$ قاطعين لها، بحيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.



ستبرهن النتيجة 2.2 في السؤال 20

مثال 5 استعمال القطع المتطابقة من قاطعين



جبر: أوجد قيمة x .

بما أنّ: $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$, $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$ ،

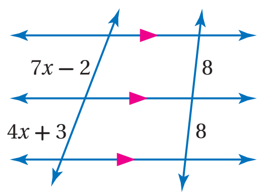
فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 2.2 .

$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x-5 = 4x+3$	بالتعويض
$2x-5 = 3$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$2x = 8$	بإضافة 5 للطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 2

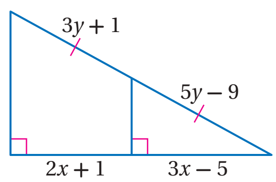
تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ من x, y .

5A)



5B)

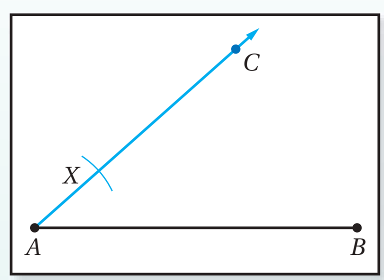


يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين، برسم العمود المنصّف للقطعة المستقيمة، ولكن لا يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة برسم أعمدة منصّفة، ولعمل ذلك تستعمل المستقيمات المتوازية والنتيجة 2.2 .

إنشاءات هندسية تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة

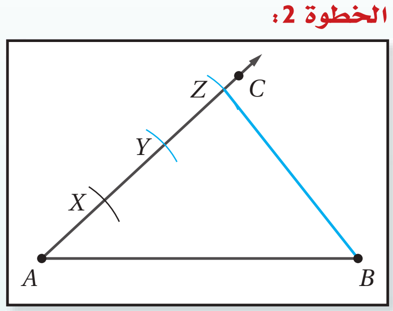
ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AB}$، ثمّ استعمل النتيجة 2.2 ؛ لتقسيمها إلى 3 أجزاء متطابقة.

الخطوة 1:



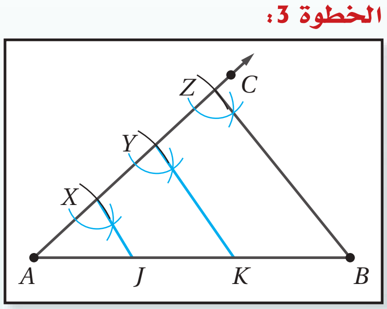
ارسم $\overrightarrow{AC}$، ثم ثبّت الفرجار عند A، وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{AC}$ عند X .

الخطوة 2:



استعمل الفرجار بالفتحة نفسها؛ لتعيين النقطتين Y, Z، بحيث $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$.
ثم ارسم $\overline{ZB}$.

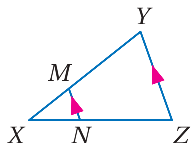
الخطوة 3:



أنشئ من X و Y مستقيمين يوازيان $\overline{ZB}$ كما درست سابقًا، وسمِّ نقطتي تقاطعهما مع $\overline{AB}$ بالحرفين J, K .

تأكـد

المثال 1 في $\triangle XYZ$ ، إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{YZ}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:

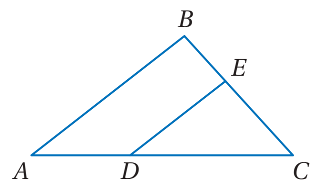


1) إذا كان: $XM = 4 , XN = 6 , NZ = 9$ ، فأوجد XY .

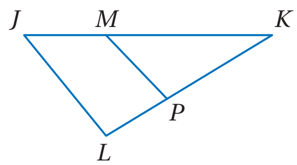
2) إذا كان: $XN = 6 , XM = 2 , XY = 10$ ، فأوجد NZ .

المثال 2

3) في $\triangle ABC$ ، إذا كان: $BC = 15, BE = 6$ ، $DC = 12 , AD = 8$ ، فهل $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ؟ برّر إجابتك.

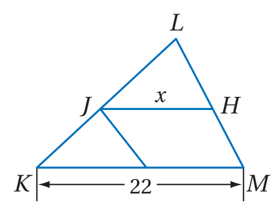


4) في $\triangle JKL$ ، إذا كان: $JK = 15, JM = 5$ ، $LK = 13, PK = 9$ ، فهل $\overline{MP} \parallel \overline{JL}$ ؟ برّر إجابتك.

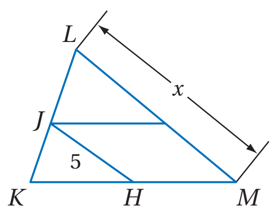


المثال 3 إذا كانت $\overline{JH}$ قطعة منصِّفة في $\triangle KLM$ ، فأوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

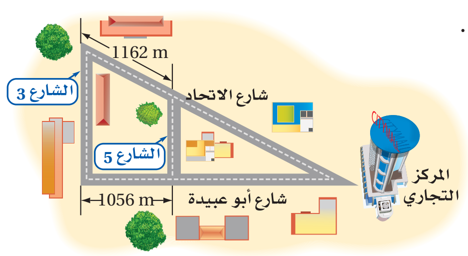
5)



6)

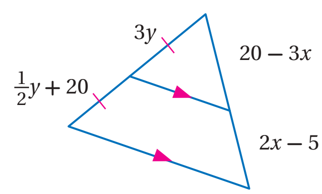


المثال 4 **7)** **خرائط:** الشارعان 3 , 5 في الخريطة المجاورة متوازيان. إذا كانت المسافة بين الشارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع أبو عبيدة 3201 m ، فأوجد المسافة بين الشارع 5 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر من المتر.

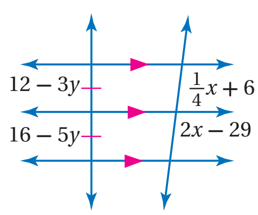


المثال 5 **جبر:** أوجد قيمتَي x , y في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8)

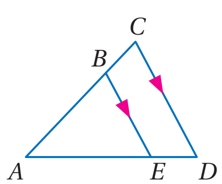


9)



تدرب وحل المسائل

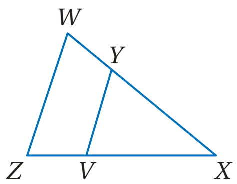
المثال 1 في $\triangle ACD$ ، إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:



10) إذا كان: $AE = 9 , BC = 4 , AB = 6$ ، فأوجد ED .

11) إذا كان: $ED = 5 , AC = 16 , AB = 12$ ، فأوجد AE .

المثال 2 حدّد ما إذا كان $\overline{ZW} \parallel \overline{VY}$ أم لا، وبرّر إجابتك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



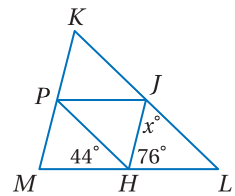
(12 $ZX = 18, ZV = 6, WX = 24, YX = 16$

(13 $WX = 31, YX = 21, ZX = 4ZV$

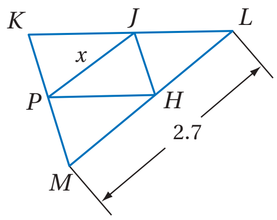
في $\triangle KLM$ ، إذا كانت $\overline{JH}, \overline{JP}, \overline{PH}$ قطعًا منصّفة ، فأوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

المثال 3

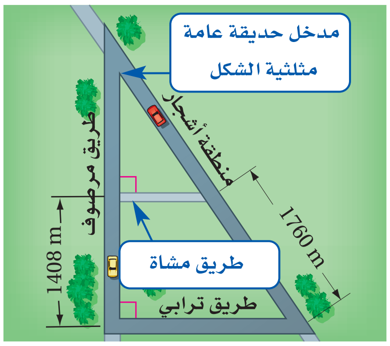
(14



(15

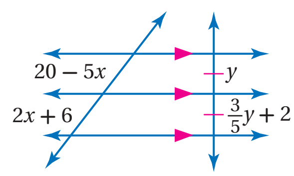


المثال 4 **(16** **خرائط:** المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار.

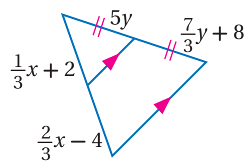


المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة كل من x, y في السؤالين الآتيين:

(17



(18



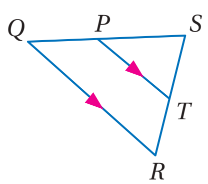
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ مما يأتي:

(19 النتيجة 2.1 **(20** النتيجة 2.2 **(21** النظرية 2.5

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريتين الآتيتين:

(22 النظرية 2.6 **(23** النظرية 2.7

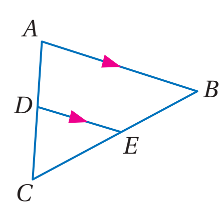
استعمل $\triangle QRS$ للإجابة عن السؤالين الآتيين:



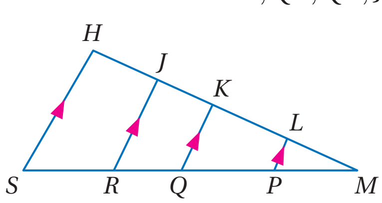
(24 إذا كان: $ST = 8, TR = 4, PT = 6$ ، فأوجد QR .

(25 إذا كان: $SP = 4, PT = 6, QR = 12$ ، فأوجد SQ .

(26 إذا كان: $CE = t - 2, EB = t + 1$ ، $CD = 2, CA = 10$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من t, CE .

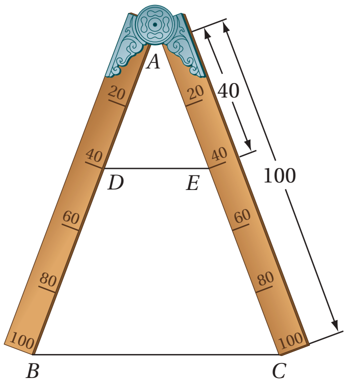


(27 إذا كان: $LK = 4, MP = 3, PQ = 6, KJ = 2$ ، $RS = 6, LP = 2$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من ML, QR, QK, JH

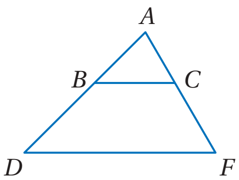


تاريخ الرياضيات

جاليلو جاليلي
(1564 م إلى 1642 م)
ولد جاليلو جاليلي في إيطاليا، ودرس الفلسفة والفلك والرياضيات، وله إسهامات جوهرية في كلٍّ منها.



28) **تاريخ الرياضيات:** في القرن السادس عشر الميلادي، ابتكر جاليليو الفرجار لاستعماله في القياس كما في الشكل المجاور. ولرسم قطعةٍ مستقيمةٍ طولها يساوي خُمسَي طول قطعةٍ معلومةٍ. اجعل نهايتَي ساقَي الفرجار عند طرفَي القطعة المعلومة، ثم ارسم قطعةً مستقيمةً بين علامتَي 40 على ساقَي الفرجار. بيِّن أن طول $\overline{DE}$ يساوي خُمسَي طول $\overline{BC}$.



أوجد قيمة x، بحيث يكون $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$.

29) $AB = x + 5,\ BD = 12,\ AC = 3x + 1,\ CF = 15$

30) $AC = 15,\ BD = 3x - 2,\ CF = 3x + 2,\ AB = 12$

إنشاءات هندسية: **أنشئ كل قطعة مستقيمة فيما يأتي وفق التعليمات التالية:**

31) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى خمس قطع متطابقة.

32) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طولَيهما 1 إلى 3.

33) قطعة مستقيمة طولها 11 cm ، ومقسمة إلى أربع قطع متطابقة.

إرشادات للدراسة

إنشاءات هندسية:
تذكّر أن الفرجار والمسطرة غير المدرجة هما الأداتان الوحيدتان المستعملتان في الإنشاءات الهندسية.

34) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستكشف تناسباتٍ مرتبطةً بمنصفات زوايا المثلث.

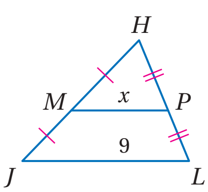
a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، وسمِّه ABC وارسم $\overrightarrow{BD}$ منصّفًا لـ $\angle B$. والثاني منفرج الزاوية وسمِّه MNP، وارسم $\overrightarrow{NQ}$ منصّفًا لـ $\angle N$، والثالث قائم الزاوية وسمِّه WXY، وارسم $\overrightarrow{XZ}$ منصّفًا لـ $\angle X$.

b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول المجاور بالقيم المناسبة.

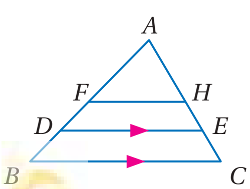
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّفٍ للزاوية المقابلة لذلك الضلع.

المثلث	الطول		النسبة	
ABC	AD		$\frac{AD}{CD}$	
	CD			
	AB		$\frac{AB}{CB}$	
	CB			
MNP	MQ		$\frac{MQ}{PQ}$	
	PQ			
	MN		$\frac{MN}{PN}$	
	PN			
WXY	WZ		$\frac{WZ}{YZ}$	
	YZ			
	WX		$\frac{WX}{YX}$	
	YX			

مسائل مهارات التفكير العليا

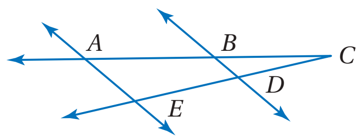


35) **اكتشف الخطأ:** يجد كلٌّ من أسامة وسلطان قيمة x في $\triangle JHL$، يقول أسامة: إنّ MP يساوي نصف JL؛ إذن x تساوي 4.5، ويقول سلطان: إن JL يساوي نصف MP؛ إذن x تساوي 18. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.



36) **تبرير:** في $\triangle ABC$، إذا كان: $AF = FB,\ AH = HC$، $DA = \frac{3}{4}AB,\ EA = \frac{3}{4}AC$ فهل $DE = \frac{3}{4}BC$ دائمًا أو أحيانًا أو لايساويه أبدًا؟

37) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $AB = 4, BC = 4, CD = DE$

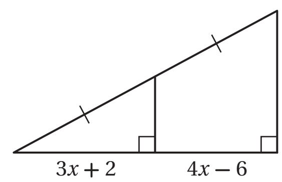
المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم ثلاث قطع مستقيمة أطوالها مختلفة a, b, c، ثم ارسم قطعةً رابعةً طولها d، بحيث يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

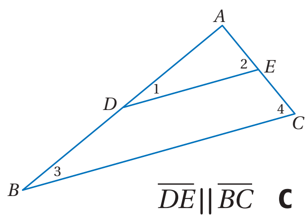
39) **اكتب:** قارن بين نظرية التناسب في المثلث ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما قيمة x؟



41) في $\triangle ABC$، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة، فأي العبارات التالية غير صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 4$

B $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

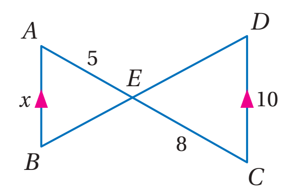
C $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

D $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

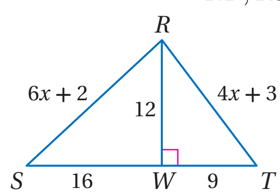
مراجعة تراكمية

جبر: اذكر النظرية أو المسلمة التي تبرر تشابه المثلثين، واكتب عبارة التشابه، ثم أوجد أطوال القطع المذكورة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-2)

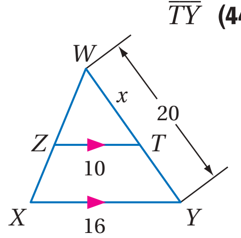
42) $\overline{AB}$



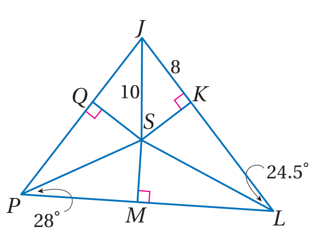
43) $\overline{RT}, \overline{RS}$



44) $\overline{TY}$



إذا كانت النقطة S مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JPL$، فأوجد كل قياسٍ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)



45) SQ

46) QJ

47) $m\angle MPQ$

48) $m\angle SJP$

استعد للدرس اللاحق

حُل كل تناسب مما يأتي:

49) $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$

50) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$

51) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$

52) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$

53) $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-4 عناصر المثلثات المتشابهة
Parts of Similar Triangles

فيما سبق:

درستُ أن أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين تكون متناسبة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف علاقات التناسب الخاصة بكلٍّ من منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.
- أستعمل نظرية منصف زاوية في مثلث.

لماذا؟

في كاميرات التصوير الاحترافي تُستعمل أفلام بمعايير خاصة؛ للحصول على صور واضحة، وعند التقاط الصورة المجاورة، كانت المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وكان طول النخلة على الفيلم 35 mm، يمكن استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد طول النخلة الحقيقي.

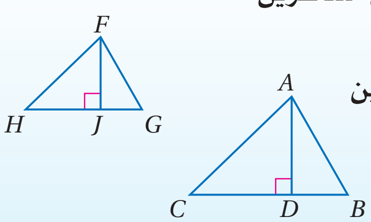
قطع مستقيمة خاصة في المثلثين المتشابهين: تعلمت في الدرس **2-1**، أنّ أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات المتشابهة، ومنها المثلثات، تكون متناسبة، ويمكن توسيع الفكرة إلى قطع مستقيمة أخرى في المثلثات.

نظريات — قطع مستقيمة خاصة في المثلثين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

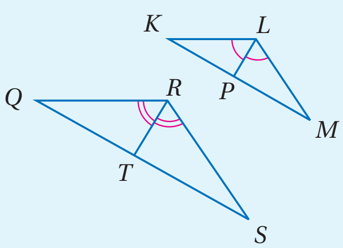
2.8 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولَي كلٍّ ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$ ، $\overline{FJ}, \overline{AD}$ ارتفاعين فإنّ $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$.



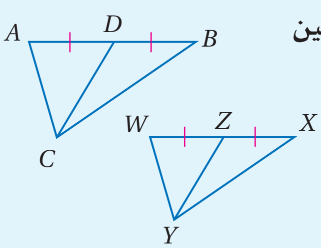
2.9 إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$ ، $\overline{LP}, \overline{RT}$ قطعتين منصفتين، فإن $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$.



2.10 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$ ، $\overline{CD}, \overline{YZ}$ قطعتين متوسطتين فإنّ $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$.

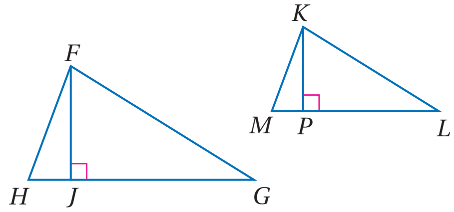


ستبرهن النظريتين 2.10 ,2.9 في السؤالين 15 ,14 على الترتيب

برهان النظرية 2.8

المعطيات: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، و $\overline{KP}, \overline{FJ}$ ارتفاعان.

المطلوب: $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$



برهان حر:

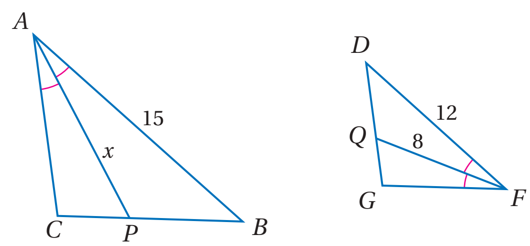
بما أن: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، إذن $\angle H \cong \angle M$ ، كما أن $\angle FJH \cong \angle KPM$ ؛ لأنهما زاويتان قائمتان ناتجتان عن ارتفاعين، وجميع الزوايا القوائم متطابقة؛ لذلك فإن

$\triangle HFJ \sim \triangle MKP$ بحسب مسلمة التشابه AA ؛ إذن $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$ وفق تعريف المضلعين المتشابهين.

ويمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات المتشابهة لإيجاد الأطوال المجهولة.

مثال 1 استعمال القطع الخاصّة في المثلثات المتشابهة

إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FDG$ في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



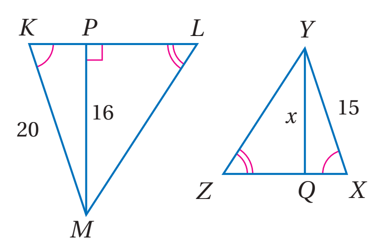
$\overline{AP}, \overline{FQ}$ منصّفا زاويتين متناظرتين و $\overline{AB}, \overline{FD}$ ضلعان متناظران للمثلثين المتشابهين ABC, FDG .

$\frac{AP}{FQ} = \frac{AB}{FD}$	النسبة بين طولَي القطعتين المستقيمتين المنصفتين لزاويتين متناظرتين في مثلثين متشابهين، تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.
$\frac{x}{8} = \frac{15}{12}$	بالتعويض
$8 \cdot 15 = x \cdot 12$	خاصية الضرب التبادلي
$120 = 12x$	بالتبسيط.
$10 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 12

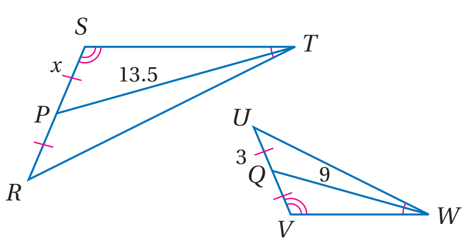
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين، في كل من السؤالين الآتيين:

(1A



(1B



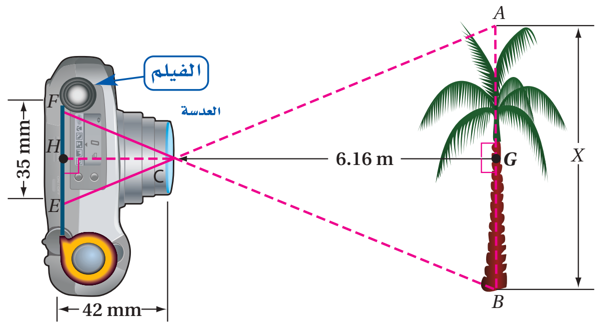
إرشادات للدراسة

استعمال معامل التشابه: يمكن حل المثال 1 أيضًا بإيجاد معامل التشابه بين $\triangle ABC, \triangle FDG$ أولًا ، وتكون النسبة بين طول القطعة المستقيمة المنصّفة لزاويةٍ في $\triangle ABC$ إلى طول القطعة المستقيمة المنصّفة للزاوية المناظرة لها في $\triangle FDG$ تساوي معامل التشابه هذا.

يمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصّة في المثلثات المتشابهة لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل

تصوير: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، يبين الرسم التوضيحي أدناه (الرسم ليس على القياس) موقع الكاميرا وطول الصورة والمسافة من عدسة الكاميرا إلى الفيلم. أوجد الارتفاع الحقيقي للنخلة.



افهم: **المعطيات:** المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وطول النخلة على الفيلم 35 mm، والمسافة بين العدسة والفيلم 42 mm.

المطلوب: الارتفاع الحقيقي للنخلة.

تكون النخلة وصورتها على الفيلم متوازيتين، ويكون $\overline{CH}$ و $\overline{CG}$ ارتفاعين في المثلثين $\triangle ABC, \triangle EFC$.

خطط: بما أنّ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$، فإنّ: $\angle BAC \cong \angle CEF, \angle CBA \cong \angle CFE$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ لذلك فإن $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ وفق مسلمة التشابه AA. اكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x.

حل:

$\frac{AB}{EF} = \frac{GC}{HC}$ النظرية 2.8

$\frac{x\,\text{m}}{35\,\text{mm}} = \frac{6.16\,\text{m}}{42\,\text{mm}}$ بالتعويض

$x\,(42) = 35\,(6.16)$ خاصيّة الضرب التبادلي

$42x = 215.6$ بالتبسيط

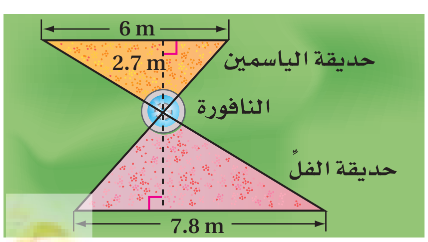
$x \approx 5.13$ بقسمة كلا الطرفين على 42

إذن ارتفاع النخلة 5.13 m تقريبًا.

تحقق: نسبة طول الصورة إلى المسافة بين العدسة والفيلم هي 35:42 أو 5:6، ونسبة ارتفاع النخلة إلى المسافة بينها وبين العدسة هي: 5.13 : 6.16؛ أي 5:6 تقريبًا. ✓

تحقق من فهمك

2) **حدائق:** في الشكل المجاور حديقتان بجوارهما نافورة، إذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلِّ.



الربط مع الحياة

طُرحت الكاميرات الرقمية في الأسواق لأول مرة عام 1994م، وكانت درجة وضوح الصورة 640×480 بكسل، وفي عام 2005 أمكن أخذ صورة بدرجة وضوح بلغت 4368×2912 بكسل بواسطة كاميرا أكثر وضوحًا لدرجة 12.8 مليون بكسل، وهي صورة أوضح كثيرًا مما تعرضه معظم الحواسيب، فظهرت شاشات حواسيب عالية الوضوح تسمى $4K$.

نظريّة منصّف زاوية في مثلث: تعلمت أن منصّف زاوية هو نصف مستقيم يقسمها إلى زاويتين متجاورتين متطابقتين، وإضافة لذلك يقسم منصف الزاوية في مثلث الضلع المقابل وفق تناسبٍ مع الضلعين الآخرين.

إرشادات للدراسة

التناسب: يمكن كتابة تناسب آخر باستعمال نظريةَ منصّف زاوية في مثلث هو

$\frac{KM}{KJ} = \frac{LM}{LJ}$

نظرية 2.11

أضف إلى مطويتك

منصّف زاوية في مثلث

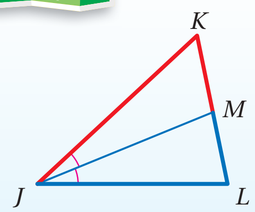
منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طولَيهما تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

مثال: إذا كانت $\overline{JM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$

فإنّ $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$

KM, KJ ← القطعتان المشتركتان بالرأس K

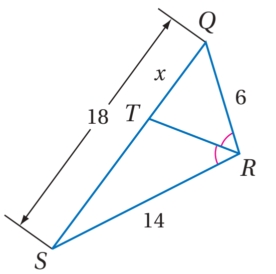
LM, LJ ← القطعتان المشتركتان بالرأس L



ستبرهن النظرية 2.11 في السؤال 19

مثال 3 استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

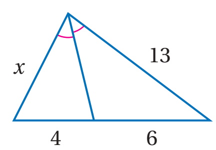


بما أنّ $\overline{RT}$ منصف زاوية في $\triangle QRS$ ، فيمكنك استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث لكتابة تناسب.

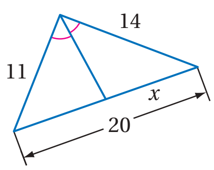
$\frac{QT}{ST} = \frac{QR}{SR}$	نظرية منصّف زاوية في مثلث
$\frac{x}{18 - x} = \frac{6}{14}$	بالتعويض
$(18 - x)(6) = x \cdot 14$	خاصية الضرب التبادلي
$108 - 6x = 14x$	بالتبسيط
$108 = 20x$	بإضافة $6x$ لكلا الطرفين
$5.4 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 20

تحقق من فهمك أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين :

(3A



(3B



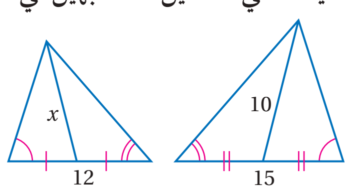
إرشادات للدراسة

المثلثات الناتجة عن منصّف زاوية في مثلث: لا يرتبط التناسب في نظرية منصف زاويةٍ في مثلث بتشابه مثلثين؛ إذ إن المثلثين الناشئين عن منصف زاويةٍ في مثلث ليسا متشابهين في الحالة العامة، على الرغم من التناسب بين زوجين من أضلاعهما، ووجود زاوية في أحدهما مطابقة لزاوية في الآخر. لكن المثلثين يتشابهان في حالة قسمة المثلث إلى مثلثين متطابقين.

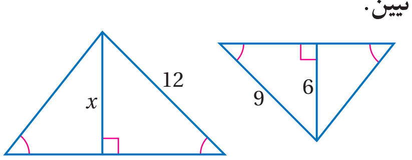
تأكـد

المثال 1 أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

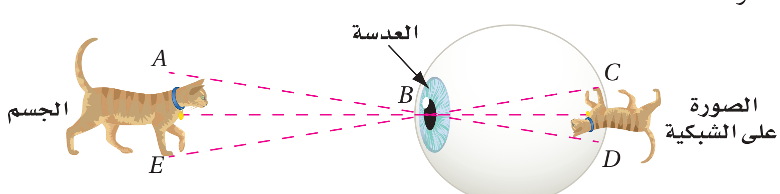
(1



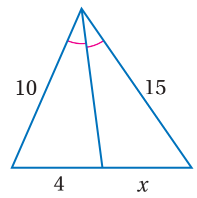
(2

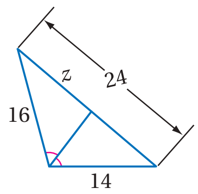


المثال 2 (3 **صورة:** ارتفاع قطّة 10 in ، وارتفاع صورتها على شبكيّة العين 7 mm، إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ، وكانت المسافة من بؤبؤ العين إلى الشبكيّة 25 mm، فكم تبعد القطة عن بؤبؤ العين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة؟



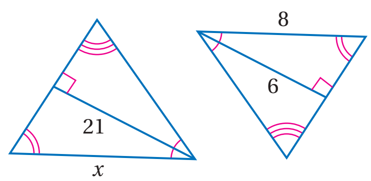
المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

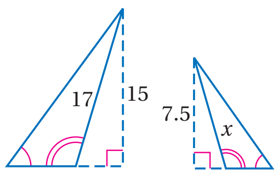
(4


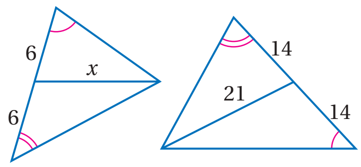
(5


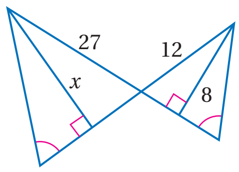
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ ممّا يأتي:

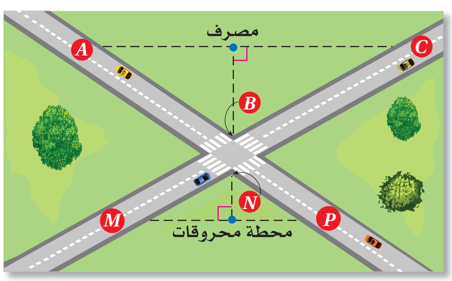
(6


(7


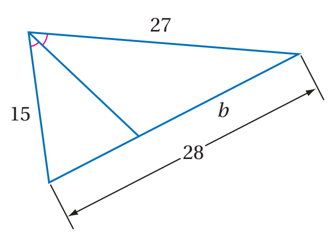
(8


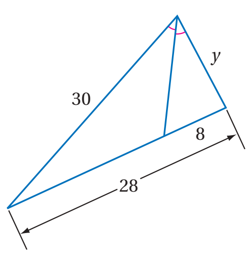
(9


المثال 2 (10 **طرق:** يشكِّل الطريقان المتقاطعان في الشكل أدناه مثلثين متشابهين، إذا كان $AC = 382\,\text{ft}$، $MP = 248\,\text{ft}$، وتبعد محطة المحروقات 50 ft عن التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عدد صحيح؟

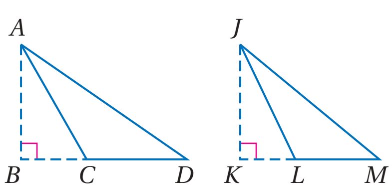


المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

(11


(12


(13 **جبر** إذا كانت $\overline{AB}, \overline{JK}$ ارتفاعين، وكان:
$\triangle DAC \sim \triangle MJL, AB = 9$
$AD = 4x - 8, JK = 21, JM = 5x + 3$،
فأوجد قيمة x .

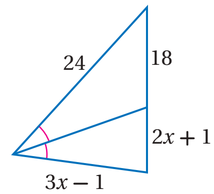


14) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظريّة 2.9 .

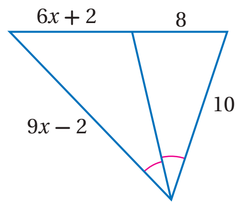
15) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.10 .

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

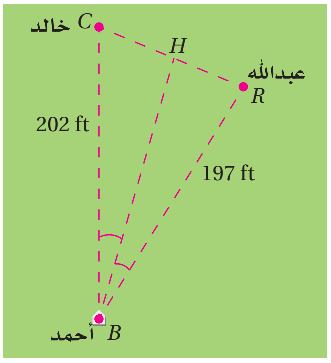
16)



17)



18) **رياضة:** تأمّل المثلث المتشكل من المسارات بين أحمد وعبدالله وخالد في أثناء مباراة كرة قدم كما في الشكل المجاور. إذا ركل أحمد الكرة بمسار ينصف $\angle B$ في $\triangle CBR$ ، فأيهما أقرب إلى الكرة؛ عبد الله أم خالد؟ وضح إجابتك.



إرشادات للدراسة

التناسب: في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، إذا كان $a>c$ ، فإن $b>d$. والعكس صحيح أيضًا، إذا كـان $b>d$ ، فإن $a>c$.

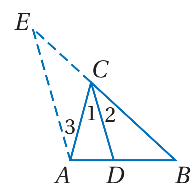
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

19) النظريّة 2.11

المعطيات: $\overline{CD}$ تنصف $\angle ACB$.

وبالرسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

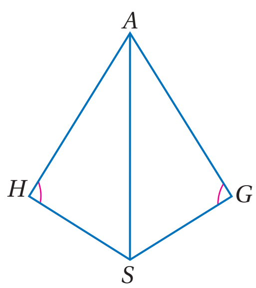
المطلوب: إثبات أن: $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$



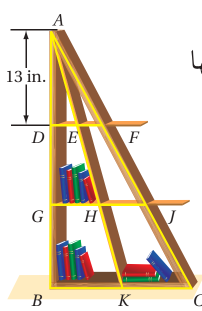
20) **المعطيات:** $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$

$\angle H \cong \angle G$

المطلوب: إثبات أن: $\frac{AH}{AG}=\frac{HS}{GS}$

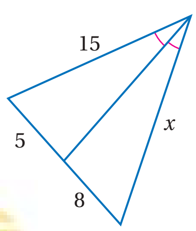


21) **أثاث:** يمثل الشكل المجاور خزانة كتب مثلثة الشكل، المسافة بين كل رفّين فيها تساوي 13 in، و $\overline{AK}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle ABC$. إذا كان $EF=3\frac{1}{3}$ in ، فكم يكون BK؟



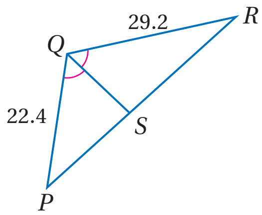
مسائل مهارات التفكير العليا

22) **اكتشف الخطأ:** يحاول كلٌّ من عبد الله وفيصل أن يجد قيمة x في الشكل المجاور. فيقول عبد الله: لإيجاد قيمة x أحل التناسب $\frac{15}{x}=\frac{5}{8}$، ويقول فيصل: لإيجاد قيمة x ، أحل التناسب $\frac{8}{15}=\frac{5}{x}$ ، أيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.



23) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية. وضِّح إجابتك.

"إذا كانت النسبة بين ارتفاع مثلثٍ وطول أحد أضلاعه تساوي النسبة بين الارتفاع وطول الضلع المناظرين لهما في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متشابهان".

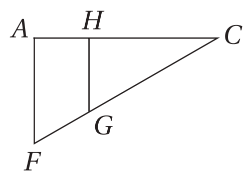


24) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\triangle PQR$ يساوي 94 وحدةً، و $\overline{QS}$ منصّف لـ $\angle PQR$، فأوجد PS, RS .

25) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النظريّة 2.9 والنظرية 2.11 .

تدريب على اختبار

26) أيُّ الحقائق الآتية ليست كافيةً لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟



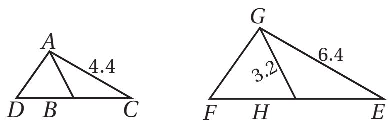
A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$

C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ قائمتان.

27) **إجابة قصيرة:** في الشكلين أدناه:
$\overline{DB} \cong \overline{BC}$, $\overline{FH} \cong \overline{HE}$

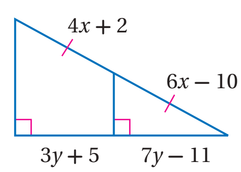


إذا كان: $\triangle ACD \sim \triangle GEF$ ، فأوجد AB .

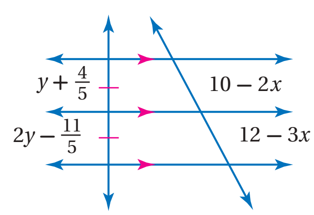
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ ممّا يأتي. (الدرس 3-2)

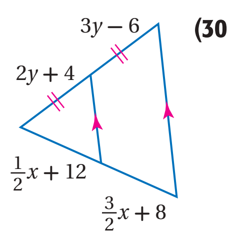
28)



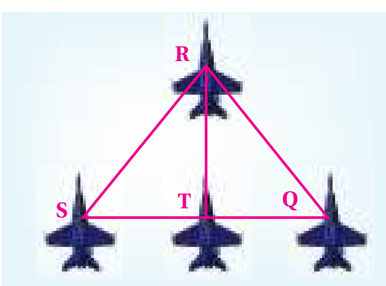
29)



30)



31) **طائرات:** في عرض للطائرات النفاثة، شكَّلت الطائرات تشكيلًا يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ ، علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$، و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

32) $E(-3, -2), F(5, 8)$

33) $A(2, 3), B(5, 7)$

34) $C(-2, 0), D(6, 4)$

35) $W(7, 3), Z(-4, -1)$

36) $J(-4, -5), K(2, 9)$

37) $R(-6, 10), S(8, -2)$

توسع 2-4

معمل الهندسة: الكسريّات Fractals

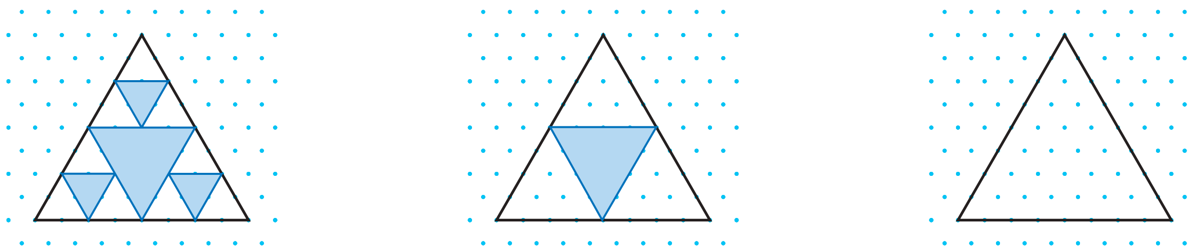
الكسريات أشكال هندسية تنتج باستعمال تكرار الأجزاء (iteration)، **وتكرار الأجزاء** هو عمليّة تكرار النمط نفسه مرّةً تِلْوَ الأخرى، وتكون الكسريات **ذاتيّة التشابه**؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي.

نشاط 1

البداية: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه 8 وحداتٍ في ورقة منقّطة.

المرحلة 1: صِلْ نقاط منتصفات أضلاع المثلث لتشكل مثلثًا آخر، وظلّل المثلث الداخلي.

المرحلة 2: كرّر العمليّة مع المثلثات الثلاثة غير المظلّلة، وصل نقاط منتصفات أضلاعها لتشكل ثلاثة مثلثات أخرى.



إذا كرّرت هذه العملية إلى مالانهاية، فإن الشكل الناتج يسمّى مثلث سيربنسكي.

تحليل النتائج:

1) إذا استمررت في هذه العمليّة، فكم يكون عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 3؟

2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المرحلة 4؟

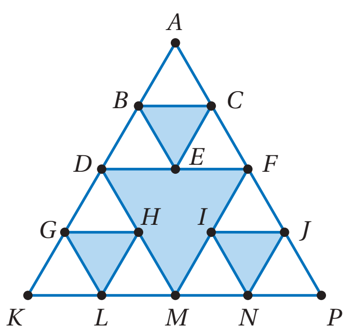
3) إذا استمررت في هذه العملية إلى مالانهاية، فماذا سيحصل لمحيط كل مثلثٍ غير مظلّل؟

4) **تحدٍّ:** استنادًا إلى الشكل المجاور، أكمل الآتي باستعمال برهان ذي عمودين:

المعطيات: $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع.

D, F, M, B, C, E منتصفات: $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ على الترتيب.

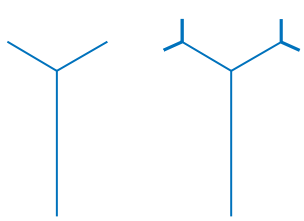
المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$.



5) يمكن رسم شجرة كسريّة، برسم غصنين جديدين من نهاية كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصنٍ منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له .

a) ارسم المرحلة 3 والمرحلة 4 للشجرة الكسريّة. ما العدد الكلّي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تعدّ الساق)

b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها للتنبؤ بالعدد الكلّي للأغصان في نهاية كل مرحلة.



جميع العمليات المكرّرة لا تتضمن رسوماتٍ لأشكال هندسيّة، فبعض العمليات المكرّرة، يمكن أن تترجَم إلى صيغٍ أو معادلات مشابهة للعبارة الجبرية التي كتبتها في السؤال 5 في الصفحة السابقة، وتسّمى هذه العبارات **صيغًا ترددية**.

نشاط 2

مثلث باسكال هو نمط عددي يبدأ كل صفٍّ فيه بالعدد 1 ، وينتهي بالعدد 1 أيضًا ، وينتج كل حدٍّ من حدود الصفوف الأخرى عن جمع الحدّين الواقعين فوقه. أوجد صيغةً لمجموع حدود كل صف في مثلث باسكال بدلالة رقم هذا الصف.

الخطوة 1: اكتب الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال.

الخطوة 2: أوجد مجموع حدود كل صفٍّ.

الخطوة 3: أوجد نمطًا يعتمد على **رقم الصف**، ويمكن استعماله لإيجاد مجموع حدود كل صفٍّ.

الصف	مثلث باسكال	المجموع	النمط
1	1	1	$2^0 = 2^{1-1}$
2	1 1	2	$2^1 = 2^{2-1}$
3	1 2 1	4	$2^2 = 2^{3-1}$
4	1 3 3 1	8	$2^3 = 2^{4-1}$
5	1 4 6 4 1	16	$2^4 = 2^{5-1}$

تحليل النتائج:

6) اكتب صيغة للمجموع S لحدود الصف n لمثلث باسكال.

7) ما مجموع حدود الصف الثامن في مثلث باسكال؟

تمارين:

اكتب صيغةً ترددية لـ $F(x)$.

8)

x	2	4	6	8	10
$F(x)$	3	7	11	15	19

9)

x	0	5	10	15	20
$F(x)$	0	20	90	210	380

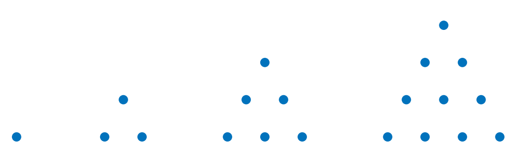
10)

x	1	2	4	8	10
$F(x)$	1	0.5	0.25	0.125	0.1

11)

x	4	9	16	25	36
$F(x)$	5	6	7	8	9

12) **تحدٍّ** يمثّل النمط أدناه متتابعة أعداد مثلثيّة. ما عدد النقاط في الحد الثامن في هذه المتتابعة؟ هل من الممكن كتابة صيغة ترددية يمكن استعمالها لتحديد عدد النقاط في العدد المثلَّثي ذي الرقم n في هذه المتتابعة؟ وإذا كان ذلك ممكنًا فاكتب الصيغة، وإلّا فوضّح السبب.



1 2 3 4

الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المضلعات المتشابهة والمثلثات المتشابهة
(الدرسان 2-1, 2-2)

- يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- يكون المثلثان متشابهين إذا كانت:

AA : زاويتان في أحدهما مطابقتين لزاويتين في المثلث الآخر.

SSS : أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة.

SAS : طولا ضلعين في أحدهما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتين.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 2-3)

- إذا وازَى مستقيم أحد أضلاع مثلث، وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين محددتين، فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.
- القطعة المنصّفة في المثلث توازي ضلعًا فيه، وطولها يساوي نصف طوله.

عناصر المثلثين المتشابهين (الدرس 2-4)

- إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كلٍّ من طولَي ارتفاعيهما المتناظرين، وطولي منصِّفَي الزاويتين المتناظرتين، وطولي القطعتين المتوسطتين المتناظرتين تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.

المطويات منظم أفكار

تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

مفردات أساسيّة

المضلعات المتشابهة (ص. 72)

معامل التشابه (ص. 73)

نسبة التشابه (ص. 73)

القطعة المنصّفة في المثلث (ص. 91)

الكسريات (ص. 106)

تكرار الأجزاء (ص. 106)

ذاتية التشابه (ص. 106)

صيغة ترددية (ص. 107)

اختبار المفردات

a) نسبة التشابه
b) معامل التشابه
c) مسلمة التشابه AA
d) نظرية التشابه SSS
e) نظرية التشابه SAS
f) القطعة المنصّفة

اختر مما سبق رمز الجملة التي تكمل كلًّا مما يأتي:

1) طرفا ___؟___ في المثلث هما منتصفا ضلعين فيه.

2) إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$ فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق ___؟___ .

3) النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ___؟___ .

4) إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان وفق ___؟___ .

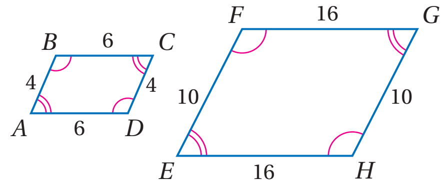
5) أحيانًا يطلق على معامل التشابه بين مضلعين اسم ___؟___ .

6) إذا كانت $\angle A \cong \angle F$ ، وكان $\frac{AC}{FD} = \frac{BA}{EF}$ ، فإن $\triangle BAC \sim \triangle EFD$ وفق ___؟___ .

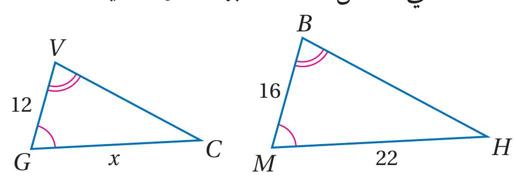
مراجعة الدروس

2-1 المضلعات المتشابهة (ص 79–72)

1) حدد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



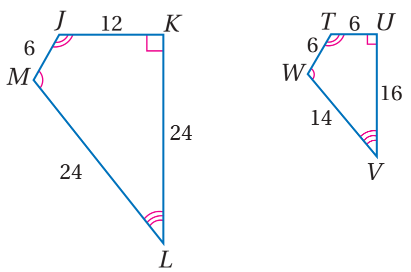
2) المثلثان في الشكل أدناه متشابهان، أوجد قيمة x.



3) **النظام الشمسي:** في نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi، إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بُعدٍ من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

مثال 1

حدّد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا. برّر إجابتك. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



الخطوة 1 : حدِّد الزوايا المتناظرة المتطابقة

$\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle U, \angle L \cong \angle V, \angle M \cong \angle W$

الخطوة 2 : اختبر النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{JK}{TU} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$, $\frac{KL}{UV} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

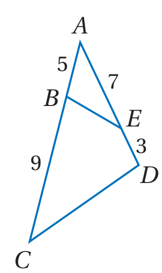
$\frac{LM}{VW} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$, $\frac{JM}{TW} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$

بما أن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، فإن المضلعين $TUVW, JKLM$ غير متشابهين.

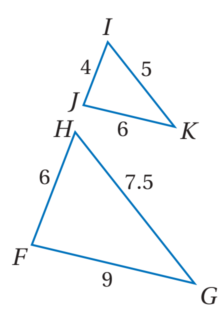
2-2 المثلثات المتشابهة (ص 88–80)

حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

4)



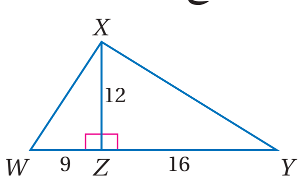
5)



6) **أشجار:** يريد عبد الله أن يقدّر ارتفاع شجرة، فوقف على مسافة 66 ft منها، فكانت نهاية ظلّه ونهاية ظل الشجرة عند النقطة نفسها، إذا كان طول عبد الله 6 ft و 4 in وطول ظلّه 15 ft، فما ارتفاع الشجرة؟

مثال 2

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.



$\angle WZX \cong \angle XZY$ لأنهما زاويتان قائمتان، والآن اختبر تناسب طولَي ساقَي المثلثين القائمين.

$\frac{WZ}{XZ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $\frac{XZ}{YZ} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

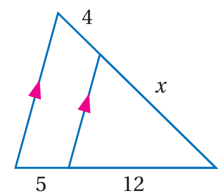
وبما أنه يوجد ضلعان في المثلث الأول، طولاهما متناسبان مع طولَي نظيرَيهما في الثاني، وأن الزاويتين المحصورتين بينهما متطابقتان، فإنّ $\triangle WZX \sim \triangle XZY$، وفق نظرية التشابه SAS.

دليل الدراسة والمراجعة

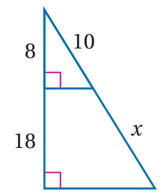
2-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة (ص 98–90)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

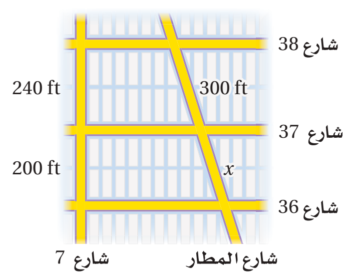
7)



8)

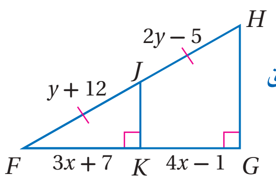


9) **شوارع:** أوجد المسافة على امتداد شارع المطار بين الشارعين 37 , 36، بفرض أن الشوارع 38 , 37 , 36 متوازية



مثال 3

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من x, y.

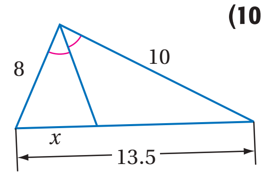


$FK = KG$	تعريف التطابق
$3x + 7 = 4x - 1$	بالتعويض
$-x = -8$	بالطرح
$x = 8$	بقسمة كلا الطرفين على (-1)
$FJ = JH$	تعريف التطابق
$y + 12 = 2y - 5$	بالتعويض
$-y = -17$	بالطرح
$y = 17$	بقسمة كلا الطرفين على (-1)

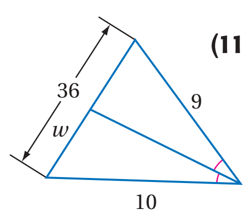
2-4 عناصر المثلثات المتشابهة (ص 105–99)

أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة:

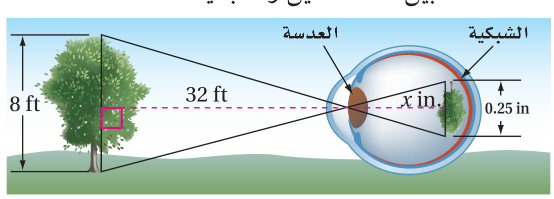
10)



11)



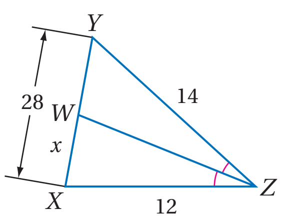
12) **عين الإنسان:** تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره، عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية، فما المسافة بين عدسة العين والشبكية؟



مثال 4

أوجد قيمة x.

استعمل نظرية منصِّف زاوية في مثلثٍ لكتابة تناسب.

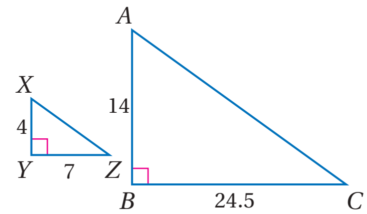


$\frac{WX}{YW} = \frac{XZ}{YZ}$	نظرية منصِّف زاوية في مثلث.
$\frac{x}{28 - x} = \frac{12}{14}$	بالتعويض
$(28 - x)(12) = x \cdot 14$	خاصية الضرب التبادلي
$336 - 12x = 14x$	بالتبسيط
$336 = 26x$	بإضافة $12x$ لكلا الطرفين
$12.9 \approx x$	بقسمة كلا الطرفين على 26

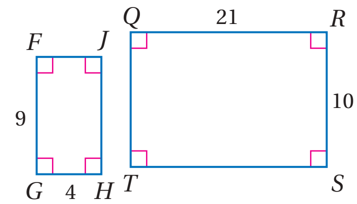
اختبار الفصل

حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضِّح إجابتك.

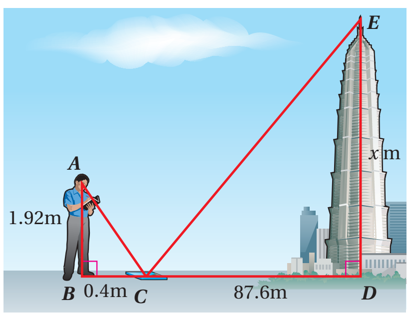
(1



(2



(3 **أبراج:** استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين الآتيين: لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى أعلى.

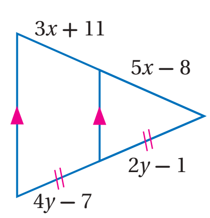


a) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟

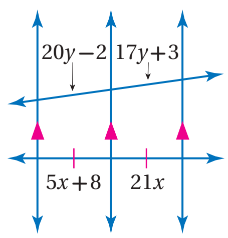
b) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ إذا كان ذلك ضروريًا.

(4



(5



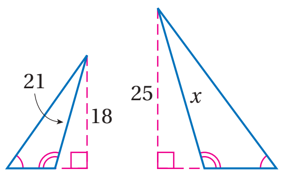
(6 **جبر:** $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع، محيطه $12a + 18b$ ، إذا كانت $\overline{QR}$ قطعة منصّفة فيه، فما قيمة QR؟

(7 **جبر:** $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره h ، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة للوتر وأحد ضلعَي القائمة فيه وطولها $4x$ ، فما محيط $\triangle ABC$؟

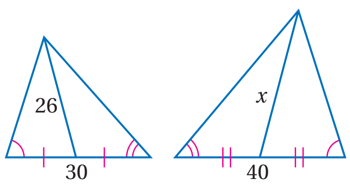
(8 **نماذج:** لدى سالم نموذج لسيارة سباق حقيقيّة، إذا كان طول السيارة الحقيقيّة 10 ft و 6 in ، وطول النموذج 7 in، فما معامل تشابه النموذج إلى السيارة الحقيقيّة؟

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(9

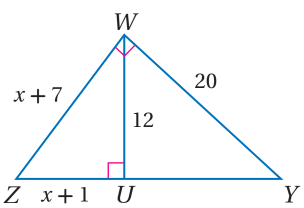


(10

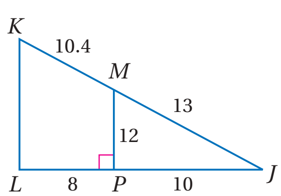


جبر: أوجد كل طول مشار إليه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(11 WZ, UZ

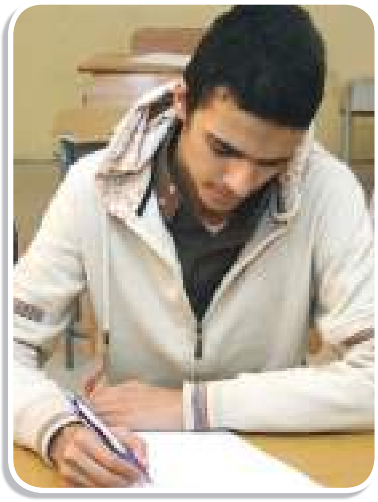


(12 KL



الإعداد للاختبارات

تعيين اللامثال



أحيانًا تتطلب أسئلة الاختيار من متعدّد، تحديد أيّ البدائل المعطاة تعدّ لا مثالًا صحيحًا، وتتطلب هذه الأسئلة أسلوبًا مختلفًا لحلّها.

استراتيجيات تعيين اللامثال

الخطوة 1

اقرأ المسألة وافهمها.

- **اللامثال:** اللامثال هو بديل من بدائل الإجابة لا يحقق شروط المسألة.
- **كلمات أساسيّة:** ابحث عن كلمة لا، أو أي كلمة تدلّ على النفي (تكتب عادة بخط غامق، أو يوضع تحتها خط)؛ لتفهم منها أن المطلوب منك أن تجد لامثالًا.

الخطوة 2

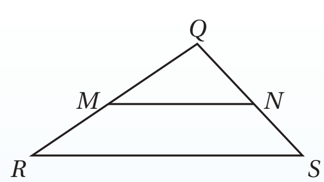
اتبع الإرشادات والخطوات الآتية؛ لمساعدتك على تعيين اللامثال:

- عيّن بدائل الإجابة الواضح عدم صحتها واحذفها.
- احذف البدائل التي تبدو بعيدة عن محتوى السؤال.
- احذف البدائل ذات الوحدات غير الصحيحة.
- اختبر بدائل الإجابة المتبقية.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، حدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها.

أيٌّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ: $\triangle QMN \sim \triangle QRS$؟



A $\angle QMN \cong \angle QRS$

B $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

C $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

D $\frac{QM}{QR} = \frac{QN}{QS}$

الحرف "لا" المكتوب بالخط الغامق، يُشير إلى أنه يتعين عليك أن تجد لامثالًا، اختبر كلًّا من بدائل الإجابة باستعمال مبادئ تشابه المثلثات؛ لترى ما إذا كان أيٌّ منها لا يثبت أن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$.

البديل A: $\angle QMN \cong \angle QRS$

إذا كانت $\angle QMN \cong \angle QRS$ ، فإنّ $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ وفق مسلمة التشابه AA .

البديل B: $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$ ، فإن $\angle QMN \cong \angle QRS$ ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان بالنسبة لمستقيمين متوازيين قطعهما القاطع $\overline{QR}$ ، لذلك $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ وفق مسلمة التشابه AA .

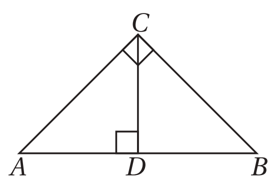
البديل C: $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

إذا كانت $\overline{QN} \cong \overline{NS}$ ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ ؛ لأننا لا نعرف أيّ شيء عن $\overline{MR}$, $\overline{QM}$ ، لذلك فالبديل C يُعدّ لامثالًا، والإجابة الصحيحة هي C. وإذا كان لديك وقت فاختبر البديل D للتأكد من أنّه مثال صحيح.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال ممّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) أيُّ التناسبات التالية غير صحيحة في الشكل أدناه؟



A $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$

B $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$

C $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$

D $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}$

2) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا ***مضادًا*** للتخمين أدناه؟

"إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإنه مربّع"

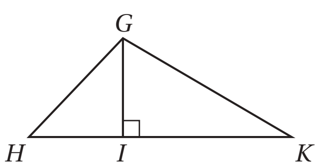
A متوازي الأضلاع

B المستطيل

C المعين

D شبه المنحرف

3) أيٌّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ $\triangle GIK \sim \triangle HIG$؟



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

4) أي مثلثين مما يأتي ***ليسا*** بالضرورة متشابهين؟

A مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها °30

B مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها °45

C مثلثان متطابقا الساقين

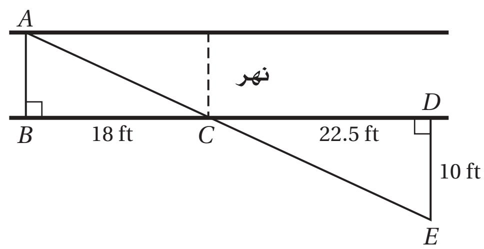
D مثلثان متطابقا الأضلاع

الفصل 2 اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثمَّ حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

1) يُريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير. فعيّن الأطوال المبيّنة في الشكل أدناه.



العرض التقريبي للنهر هو:

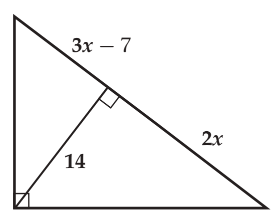
A 40.5 ft

B 6 ft

C 7 ft

D 8 ft

2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟



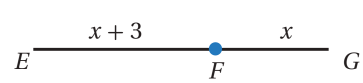
A 5

B 7

C 8

D 10

3) إذا كان $EG = 15\text{m}$ ، فما طول $\overline{EF}$؟



A 6 m

B 9 m

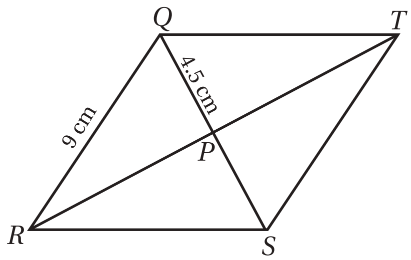
C 10 m

D 12 m

إرشادات للاختبار

السؤال 2: عيّن مثلثين متشابهين، واكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x .

4) أوجد $m\angle RST$ في المعين $QRST$ أدناه.



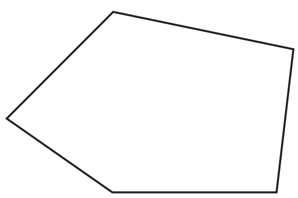
A 60°

B 90°

C 120°

D 150°

5) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع أدناه؟



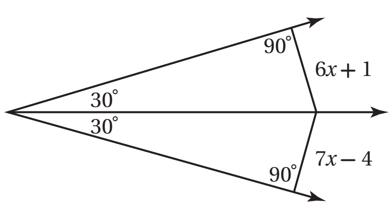
A 450°

B 540°

C 630°

D 720°

6) أوجد قيمة x .



A 3

B 4

C 5

D 6

7) شكلان رباعيَّان متشابهان بمعامل تشابه 3:2، إذا كان محيط الشكل الرباعي الأكبر 21 m ، فما محيط الشكل الرباعي الأصغر؟

A 14 m

B 17.5 m

C 28 m

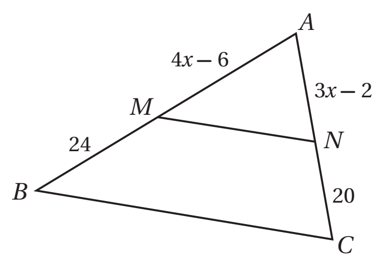
D 31.5 m

أسئلة ذات إجابات قصيرة

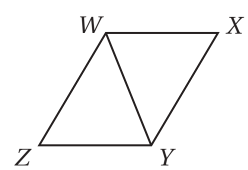
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) **هندسة إحداثية :** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$، وحدد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا.

9) إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x .



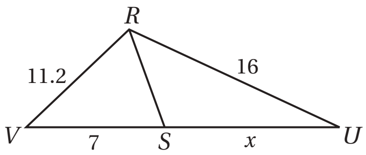
10) الشكل الرباعي $WXYZ$ معين، إذا كان $m\angle XYZ = 110°$، فأوجد $m\angle ZWY$.



11) ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

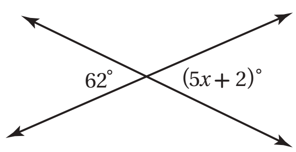
إذا كان صالح مولودًا في الرياض، فإنّه مولود في السعوديّة.

12) إذا كان $\overline{RS}$ تنصّف $\angle VRU$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x .



13) يبيِّن مقياس رسم خريطة أن $1\,\text{cm} = 25\,\text{km}$، ما المسافة الحقيقية بين مدينتين، إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة $4.5\,\text{cm}$؟

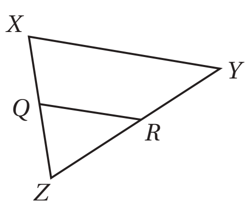
14) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:



a) إذا كان $\overline{XY} \parallel \overline{QR}$ ، فما العلاقة بين الأطوال: XQ, QZ, YR, RZ ؟

b) إذا كان: $\overline{XY} \parallel \overline{QR}, XQ = 15, QZ = 12, YR = 20$، فما طول $\overline{RZ}$ ؟

c) إذا كان: $\overline{XY} \parallel \overline{QR}, XQ = QZ, QR = 9.5$ ، فما طول $\overline{XY}$؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس..	2-2	2-2	مهارة سابقة	1-4	1-1	مهارة سابقة	2-1	1-3	2-3	1-5	مهارة سابقة	2-4	2-1	مهارة سابقة	2-3

الفصل

3 التحويلات الهندسية والتماثل
Transformations and Symmetry

فيما سبق:

درستُ التحويلات الهندسية: الانعكاس والإزاحة والدوران.

والآن:

- أرسم صور أشكال بالانعكاس أو الانسحاب أو الدوران أو التمدد.
- أتعرف تركيب تحويلين هندسيين.
- أتعرف التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد والثلاثية الأبعاد.

لماذا؟

تصوير: يستعمل المصوِّرون الانعكاس والدوران والتماثل؛ لجعل الصورة مثيرة للاهتمام وجذَّابة بصريًا.

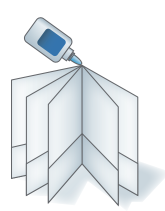
المطويات منظم أفكار

التحويلات الهندسية والتماثل: اعمل هذه المطوية؛ لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 3 ، مبتدئًا بأربع أوراق A4.

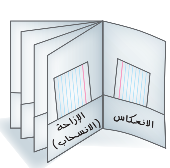
1. اطوِ كل ورقة من المنتصف.

2. ابسط الأوراق ثم اطوها طوليًا بعرض 5 cm لتكوّن جيبين.

3. ألصق الأوراق جنبًا إلى جنب على طول خطِّ الطيِّ، لتكوِّن كتيبًا كما في الشكل أدناه.



4. ضع عنوانًا لكل جيب كما في الشكل أدناه، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة وخصص الجيب الأخير للمفردات الجديدة.



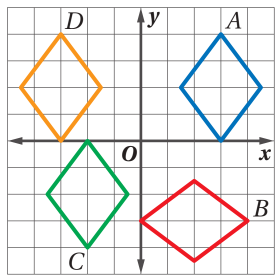
التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد :

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

صنِّف كلًّا من التحويلات الهندسية الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B

2) D إلى A

3) A إلى C

4) **هندسة إحداثية :** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $P(-4,2)$,$Q(3,0)$, $R(4\ ,3)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

5) $(0,1)\ ,\ (2,8)$

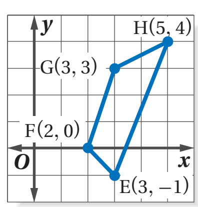
6) $(-2,0)\ ,\ (3,3)$

7) $(6,4),\ (2,1)$

8) $(-3,-1),\ (0,5)$

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم، أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in، وكان طول الصورة 1 ft

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.



10) $\overline{EF}$

11) $\overline{FG}$

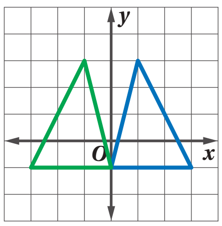
12) $\overline{GH}$

13) $\overline{HE}$

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف التحويل الهندسي المبين في الشكل المجاور إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.



يبعد كل رأس وصورته البعد نفسه عن المحور y ، ولذلك فهذا التحويل انعكاس.

مثال 2

وقف مقدّم استعراض رياضي عند النقطة (1, 4)، وتحرك منها 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل. ما إحداثيات النقطة التي وصل إليها؟

يمكن التعبير عن حركة 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل بالقاعدة:

$$(x, y) \rightarrow (x+4, y-3)$$

$$(1, 4) \rightarrow (1+4, 4-3) = (5, 1)$$

مثال 3

عمل خالد نموذجًا مصغرًا لجسر. أوجد مقياس الرسم للنموذج، إذا كان طول النموذج 2 m ، وطول الجسر 120 m

طول النموذج يساوي **2 m** ، وطول الجسر يساوي **120 m**؛

إذن مقياس رسم النموذج إلى الجسر $\frac{2\ m}{120\ m}$؛ أي $\frac{1}{60}$

3-1

الانعكاس
Reflection

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ الانعكاس بوصفه تحويلًا هندسيًّا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن الانعكاس.
- ارسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي .

المفردات:

الانعكاس
reflection

محور الانعكاس
line of reflection

لماذا؟

تُظهر المسطحات المائية انعكاسات رائعة لما يُحيط بها. ففي مسطحات الماء الراكدة، تلاحظ أن لكل نقطة فوق سطح الماء نقطة مناظرة لها تحته، هي صورتها الناتجة عن الانعكاس. وتكون المسافة بين النقطة الأصلية وسطح الماء مساوية للمسافة بين صورتها وسطح الماء.

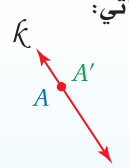
رسم الانعكاسات: تعلّمت أن **الانعكاس** هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم يسمى **محور الانعكاس**، بحيث يكون بُعد النقطة وبُعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول مستقيم

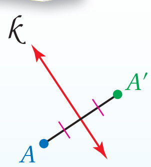
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول مستقيم ينقل النقطة إلى صورتها كما يأتي:

- **إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس، فإن صورتها هي النقطة نفسها.**
- **إذا كانت النقطة غير واقعة على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها.**



A تقع على المستقيم k



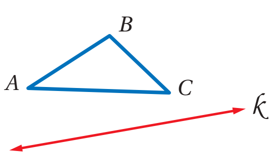
A لا تقع على المستقيم k

الرموز A', A'', A''' تمثل أسماء للنقاط الناتجة عن تحويل هندسي أو أكثر للنقطة A

لرسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم، ارسم صورة كل رأس من رؤوسه، ثم صل بين صور الرؤوس لتكوين صورة المضلع بهذا الانعكاس.

مثال 1 — رسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم

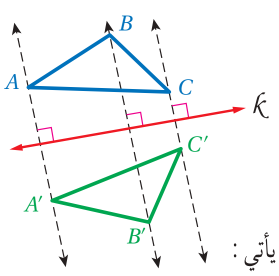
ارسم صورة الشكل بالانعكاس حول المستقيم المعطى.



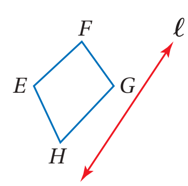
الخطوة 1: ارسم مستقيمًا يمرُّ بكل رأس من رؤوس المثلث، ويكون عموديًّا على المستقيم k باستعمال مثلث الرسم.

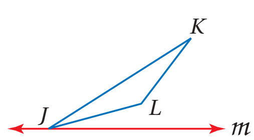
الخطوة 2: قِسِ المسافة بين النقطة A والمستقيم k باستعمال الفرجار، وعيّن النقطة A' ؛ بحيث يكون المستقيم k العمود المنصف لـ $\overline{AA'}$.

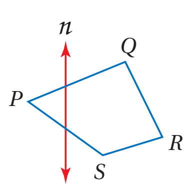
الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعين B' و C'، ثم صِل الرؤوس A', B', C' لتشكل صورة المثلث الناتجة عن الانعكاس.



✓ **تحقق من فهمك** ارسم صورة الشكل بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كل شكل مما يأتي :

(1A


(1B


(1C


إرشادات للدراسة

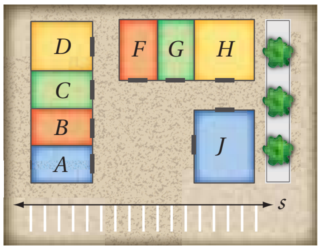
الشكل الأصلي والصورة: سيكون الشكل الأصلي في هذا الكتاب باللون الأزرق دائمًا، وستكون الصورة باللون الأخضر.

إرشادات للدراسة

تحويل التطابق: هو تحويل تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

لاحظ أن الانعكاس هو تحويل تطابقٍ، ففي المثال 1، يكون $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

مثال 2 من واقع الحياة — اختصار المسافات باستعمال الانعكاس

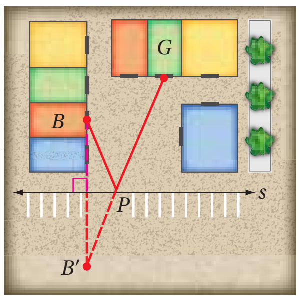


تسوق: اصطحب أحمد صديقه عليًّا في سيارته إلى السوق، حيث يرغب أحمد في الاتجاه إلى المتجر B؛ لشراء بعض الملابس، بينما يرغب عليٌّ في الاتجاه إلى المتجر G؛ لشراء حذاءٍ، ففي أي مكان من المواقف المحددة على المستقيم s يوقف أحمد سيارته، بحيث تكون المسافة التي سيقطعانها سيرًا للوصول إلى المتجرين أقل ما يمكن؟

افهم: **المعطيات:** أوقف أحمد سيارته في الموقف P على المستقيم s.
اتجه أحمد إلى المتجر B لشراء بعض الملابس.
واتجه علي إلى المتجر G لشراء حذاء.

المطلوب: حدد الموقف P على المستقيم s، بحيث يكون $BP + PG$ أقل ما يمكن.

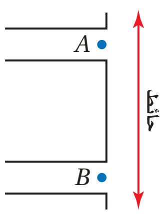
خطط: تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أقل ما يمكن، عندما تكون هذه النقاط على استقامةٍ واحدةٍ.



حُلَّ: ارسم $\overline{B'G}$. وعيّن P عند تقاطع المستقيم s مع $\overline{B'G}$.
علمًا بأن B' هي صورة النقطة B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم s

تحقق: اختر مواقع أخرى للنقطة P على المستقيم s، وقارن مجموع $BP + PG$ في كل حالة؛ للتحقق من أن الموقع الذي تم تحديده للنقطة P هو الذي يجعل هذا المجموع أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك

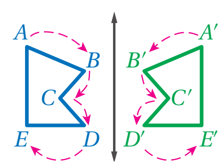


2) **مبيعات تذاكر:** يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة قدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخصٌ ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن.

رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي: يمكن أيضًا رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي حول مستقيم أفقيٍّ أو مستقيم رأسيٍّ.

إرشادات للدراسة

خصائص الانعكاس: يحافظ الانعكاس على الأبعاد وقياسات الزوايا والاستقامة وترتيب مواقع النقاط، ولكن يعكس الاتجاه.

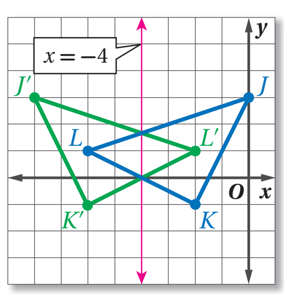


مثال 3 — رسم صورة بالانعكاس حول مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(0, 3), K(-2, -1), L(-6, 1)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

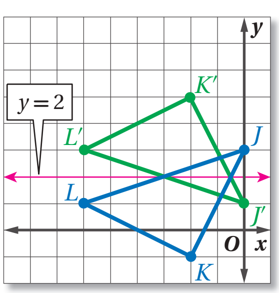
a) $x = -4$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأسٍ، بحيث يكون المستقيم $x = -4$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



b) $y = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 2$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$، الذي إحداثيات رؤوسه هي: $R(-1, 1), S(4, 1), T(4, -1), V(-1, -3)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي:

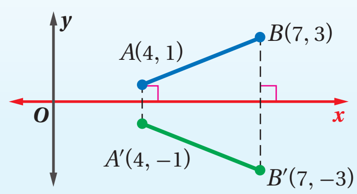
3A) $y = -3$ **3B)** $x = 2$

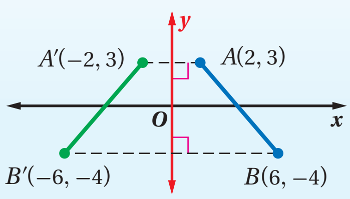
يمكنك استعمال القاعدة الآتية، عندما يكون محور الانعكاس هو المحور x أو المحور y .

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحور x أو المحور y

أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1	**التعبير اللفظي:** لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور y، اضرب إحداثي x لها في -1
الرموز: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$	**الرموز:** $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال:	**مثال:**





قراءة الرياضيات

التعبير عن الدالة بالصيغة الإحداثية: يمكن قراءة العبارة: $P(a,b) \rightarrow P'(a,-b)$ على النحو الآتي: تتحول النقطة P التي إحداثيّاها a و b إلى النقطة P شرطة التي إحداثيّاها a وسالب b .

مثال 4 رسم صورة بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

a) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 3), B(2, 0), C(1, 2)$ بالانعكاس حول المحور x .

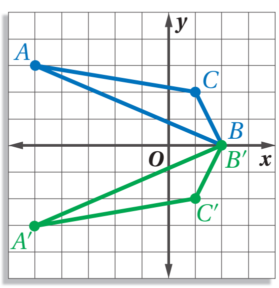
اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 .

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5, -3)$

$B(2, 0) \rightarrow B'(2, 0)$

$C(1, 2) \rightarrow C'(1, -2)$



b) متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(-4, 1), Q(2, 3), R(2, -1), S(-4, -3)$ بالانعكاس حول المحور y .

اضرب الإحداثي x لكل نقطة في -1

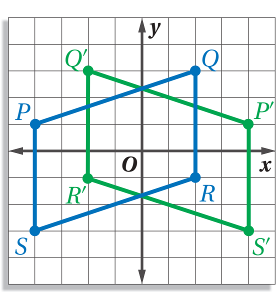
$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$P(-4, 1) \rightarrow P'(4, 1)$

$Q(2, 3) \rightarrow Q'(-2, 3)$

$R(2, -1) \rightarrow R'(-2, -1)$

$S(-4, -3) \rightarrow S'(4, -3)$



إرشادات للدراسة

النقاط الثابتة: تسمى النقطة B في المثال 4a نقطة ثابتة؛ لأنها اقترنت مع نفسها، وأن إحداثيّيها هما نفس إحداثيَّي صورتها B' بالانعكاس، فالنقاط الواقعة على محور الانعكاس هي فقط التي تبقى ثابتةً تحت تأثير الانعكاس.

تحقق من فهمك

4A) المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه: $E(-4, -1), F(2, 2), G(3, 0), H(-3, -3)$ بالانعكاس حول المحور x.

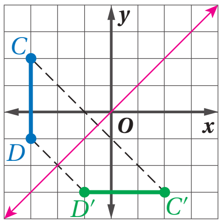
4B) $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 2), K(2, -2), L(4, -5)$ بالانعكاس حول المحور y .

مراجعة المفردات

المستقيمات المتعامدة:

يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين، إذا وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1

مثال: المستقيمات الأفقية والرأسية تكون متعامدة دائمًا.



ويمكن أيضًا أن تعكس شكلًا حول المستقيم $y = x$، ففي المستوى الإحداثي المجاور، ارسم عمودًا من النقطة C على المستقيم $y = x$، وحيث إن ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1، فإن ميل العمود الذي رسمته يساوي -1، لاحظ أنك تحركت من النقطة $C(-3, 2)$، بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل فوصلت إلى نقطة تقاطع العمود الذي رسمته مع المستقيم $y = x$.

ومن هذه النقطة على $y = x$، تحرك 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل؛ لتعيّن النقطة $C'(2, -3)$ التي هي صورة النقطة C بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

وبطريقة مماثلة نجد أن صورة $D(-3, -1)$ هي $D'(-1, -3)$.

وبمقارنة إحداثيات هاتين النقطتين بإحداثيات صورتَيهما، يمكن الوصول إلى القاعدة الآتية للانعكاس حول المستقيم $y = x$.

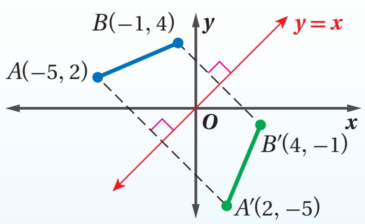
مفهوم أساسي — الانعكاس حول المستقيم $y = x$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، بدّل موضعَي الإحداثيين x و y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, x)$

مثال:

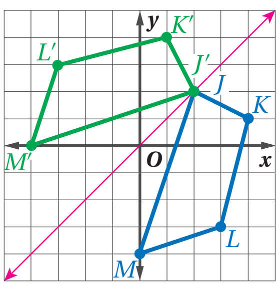


مثال 5 — رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$

مثِّل بيانيًّا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(2, 2), K(4, 1), L(3, -3), M(0, -4)$، ثم ارسم صورته $J'K'L'M'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

بدّل الإحداثيين x و y لكل الرؤوس.

$$
\begin{array}{lcl}
(x, y) & \rightarrow & (y, x) \\
J(2, 2) & \rightarrow & J'(2, 2) \\
K(4, 1) & \rightarrow & K'(1, 4) \\
L(3, -3) & \rightarrow & L'(-3, 3) \\
M(0, -4) & \rightarrow & M'(-4, 0)
\end{array}
$$

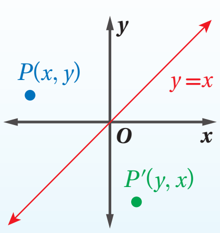
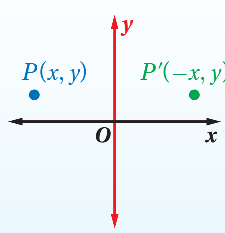
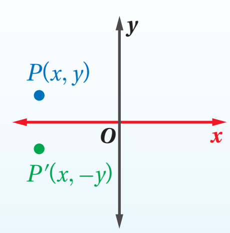


تحقق من فهمك

5) مثِّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

ملخص المفهوم — الانعكاس في المستوى الإحداثي

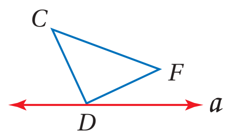
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المستقيم $y = x$	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المحور x
		
$(x, y) \rightarrow (y, x)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

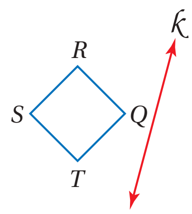
تأكد

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

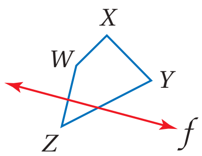
(1



(2

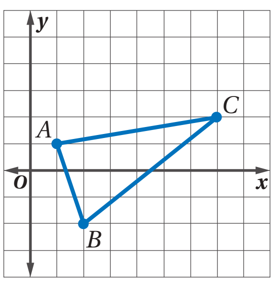


(3



المثال 2 **(4** **مباريات:** ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يُوقِفَ صديقه سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.

المثال 3 مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ من السؤالين 5، 6.



(5 $y = -2$

(6 $x = 3$

المثالان 4, 5 مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

(7 $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y.

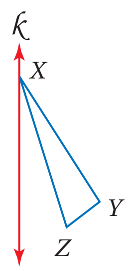
(8 $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x.

(9 الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

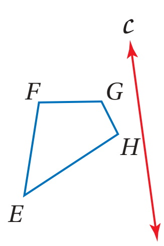
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

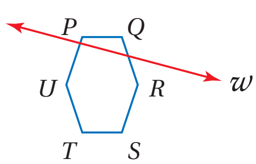
(10



(11

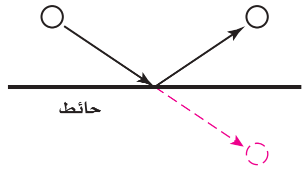


(12



المثال 2

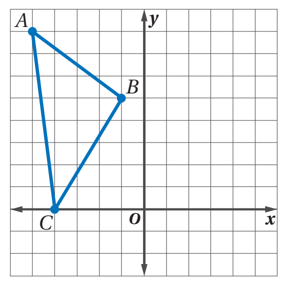
13) **كرة قدم:** عندما ترتطم كرة بحائطٍ فإنها ترتدُّ عنه وتتحرك في مسار نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح جانبًا.

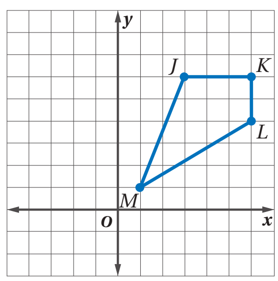


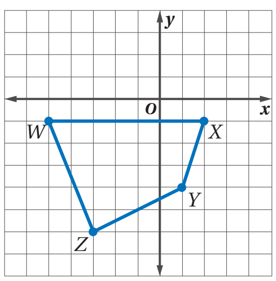
استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط التي يجب أن يصوب سليمان إليها الكرة إذا كان يشارك في مباراة كرة قدم في ملعب داخليٍّ، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B، ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C.

المثال 3

مثِّل صورة كل شكلٍ مما يأتي بيانيًّا بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى .







14) $\triangle ABC, y = 3$ **15)** $JKLM, x = 1$ **16)** $WXYZ, y = -4$

17) $\triangle ABC, x = -1$ **18)** $JKLM, y = 4$ **19)** $WXYZ; x = -2$

المثالان 4, 5

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد .

20) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 2), B(1, 2), C(1, -1), D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.

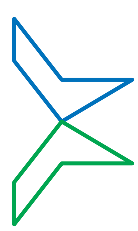
21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 6), K(0, 6), L(0, 2), M(-4, 2)$ بالانعكاس حول المحور y.

22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3, 2), G(-4, -1), H(-6, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

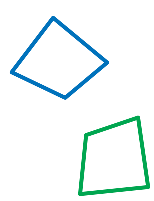
23) $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(2, 3), X(7, 3), Y(6, -1), Z(1, -1)$ بالانعكاس حول المحور x.

يُبيِّنُ كُلٌّ من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس في كلٍّ منها.

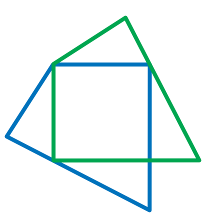
24)

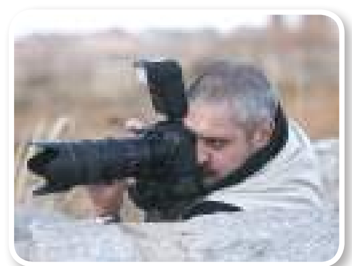


25)



26)

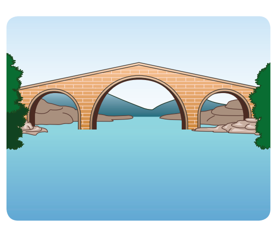




الربط مع الحياة

يلتقط المصورون الصور لأغراض متعددة، مثل الصحافة أو لأغراض علمية، ويتطلب العمل في بعض مجالات التصوير مثل التصوير الصحفي أو التصوير العلمي تدريبًا خاصًّا.

27) **تصوير:** ارسم صورة الجسر الموضح في الصورة المجاورة بالانعكاس في الماء.



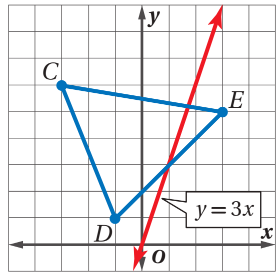
جبر: مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس

28) المحور x

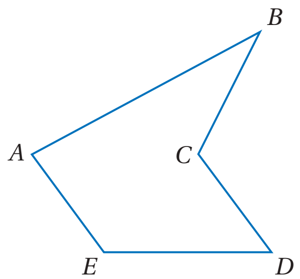
29) المحور y

30) المستقيم $y = x$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$.

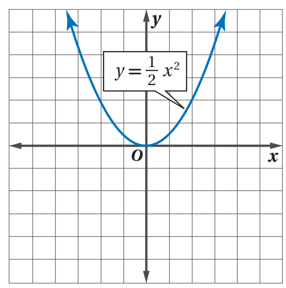


32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير.

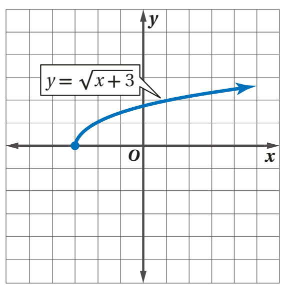


جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدّد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس.

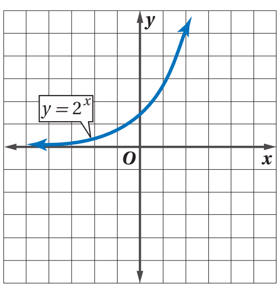
33) المحور x



34) المحور y



35) المحور x



36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول نقطة الأصل.

a) **هندسيًّا:** ارسم المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.

b) **بيانيًّا:** عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامةٍ واحدةٍ، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه من نقطة الأصل.

c) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A		A'	
	B		B'	
	C		C'	

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكلٍ وصورته الناتجة عن انعكاسه حول نقطة الأصل.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $C\,(2, 3)$ الناتجة عن انعكاس حول المحور x، أيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

جميل	إبراهيم
$C'(2, -3)$	$C'(-2, 3)$

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقةً عليه تمامًا.

39) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضِّح الشروط التي يجب توافرها لتحقيق هذا الأمر.

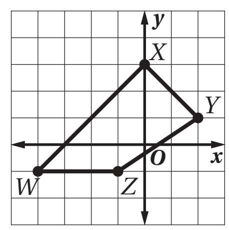
40) **تحدٍّ:** إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيمٍ معينٍ هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة محور الانعكاس. وضح إجابتك.

41) **تبرير:** هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

42) **اكتب:** تقع النقاط P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ حيث أن Q واقعة بين P و R. باستعمال الهندسة الإحداثية، أثبت أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

تدريب على اختبار

43) **إجابة قصيرة:** إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $W'X'Y'Z'$ ، فما إحداثيات X'؟



44) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(-2, 4), (3, 3)$ على الترتيب، احسب AB.

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

C $(5, -1)$

D $\sqrt{50}$

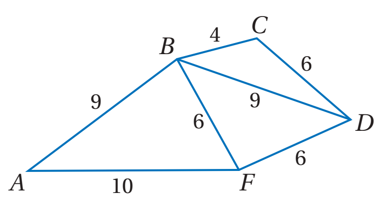
مراجعة تراكمية

45) **هندسة إحداثية:** في $\triangle LMN$، $\overline{PR}$ تقسّم الضلعين NL , MN إلى قطع مستقيمة متناظرة أطولها متناسبة، إذا كانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ وكانت $RN = 3$، فأوجد MR. (الدرس 2-3)

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينةً تصف العلاقة بين قياسَي الزاويتين أو طولَي القطعتين المستقيمتين في كلٍّ مما يأتي. (مهارة سابقة)

46) $m\angle BDC, m\angle FDB$

47) $m\angle FBA, m\angle DBF$



استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفَي $\overline{AB}$ هما $A(5, 4)$, $B(3, -1)$ ، تحركت كلٌّ من هاتين النقطتين 3 وحداتٍ إلى اليمين و5 وحداتٍ إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة B' , A' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي.

b) أوجد إحداثيات A' , B' .

c) أوجد طول كلٍّ من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$.

2-3 الإزاحة (الانسحاب)
Translation

لماذا؟

تُفتتح بعض الاحتفالات الوطنية بعروض عسكرية تزيدها بهجةً وبهاءً. ومعظم حركات أعضاء تلك الفرق العسكرية تمثّل ما يُعرف في الهندسة بالإزاحة أو الانسحاب.

رسم الإزاحة (الانسحاب): تعلمت سابقًا أن **الانسحاب** هو تحويل هندسي ينقل الشكل من موقع إلى آخر من دون تدويره. حيث يتم نقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها وفي الإتجاه نفسه. ويمكن التعبير عن الإزاحة (الانسحاب) لكل نقطة من الشكل بقطعة مستقيمة طولها يساوي $\overline{AA'}$ حيث إن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الإزاحة (الانسحاب).

فيما سبق:

درستُ الانسحاب بوصفه تحويلًا هندسيًّا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة.
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

المفردات:

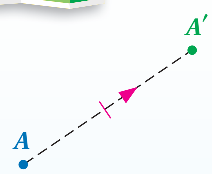
الانسحاب
translation

مفهوم أساسي — الإزاحة (الانسحاب)

أضف إلى مطويتك

تنقل الإزاحة (الانسحاب) كل نقطة إلى صورتها مسافةً محدّدةً وفي اتجاه محدّد (اتجاه الإزاحة). فالإزاحة التي تنقل النقطة A إلى صورتها A'، تنقل نقاط الشكل جميعها أيضًا بحيث إن:

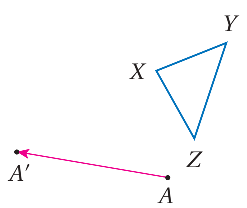
- مقدار الإزاحة يساوي طول القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها يساوي طول $\overline{AA'}$.
- القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطةٍ بصورتها توازي $\overline{AA'}$.



النقطة A' هي صورة النقطة A بالإزاحة.

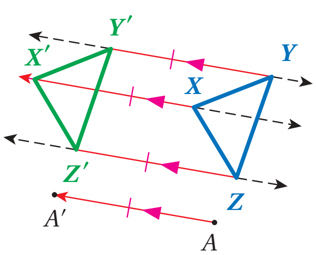
مثال 1 رسم الإزاحة في المستوى

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A'.



الخطوة 1: باستعمال المسطرة ومثلث الرسم، ارسم من كل رأسٍ من رؤوس المثلث XYZ مستقيمًا يوازي $\overline{AA'}$.

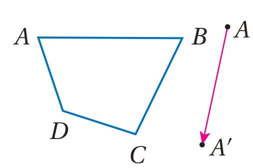
الخطوة 2: قِسْ طول $\overline{AA'}$، ثم عيّن على المستقيم المار بالرأس X النقطة X'، التي تبعد عن X في الاتجاه من A إلى A' مسافةً تساوي طول $\overline{AA'}$.



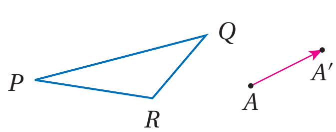
الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعيّن Z' , Y'، ثم صِل الرؤوس X', Y', Z' لتشكل المثلث $X'Y'Z'$ النّاتج عن الإزاحة.

تحقق من فهمك: ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A الى A'

(1A)



(1B)



رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي: يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي، إذا علمنا مقدار الإزاحة واتجاهها أفقيًّا أو رأسيًّا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة: $(x, y) \to (x+a, y+b)$ ، ويمكن استعمال هذه القاعدة لإجراء إزاحةٍ للشكل في المستوى الإحداثي.

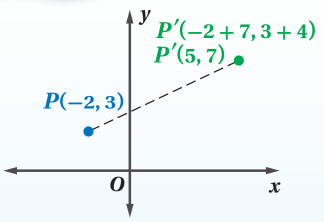
مفهوم أساسي — الإزاحة في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدةً أفقيًا، و b وحدةً رأسيًا، اجمع a إلى الإحداثي x ، و b إلى الإحداثي y .

الرموز: $(x, y) \to (x+a, y+b)$

مثال: إذا كانت: $a = 7$, $b = 4$ ، فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.



قراءة الرياضيات

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية: عندما يكون $b = 0$، تكون الإزاحة أفقية فقط. وعندما يكون $a = 0$، تكون الإزاحة رأسية فقط.

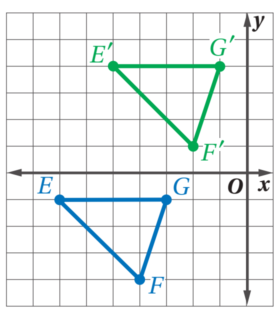
مثال 2 — الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

a) $\triangle EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x+2, y+5)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى .

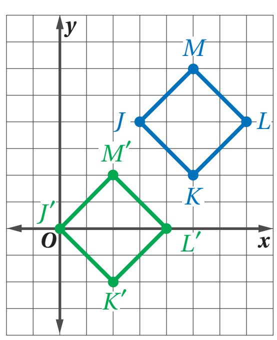
$$
\begin{array}{lcl}
(x, y) & \to & (x+2, y+5) \\
E(-7, -1) & \to & E'(-5, 4) \\
F(-4, -4) & \to & F'(-2, 1) \\
G(-3, -1) & \to & G'(-1, 4)
\end{array}
$$



b) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 4), K(5, 2), L(7, 4), M(5, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x-3, y-4)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل .

$$
\begin{array}{lcl}
(x, y) & \to & (x-3, y-4) \\
J(3, 4) & \to & J'(0, 0) \\
K(5, 2) & \to & K'(2, -2) \\
L(7, 4) & \to & L'(4, 0) \\
M(5, 6) & \to & M'(2, 2)
\end{array}
$$



إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة: إشارة a السالبة تعني أن الإزاحة إلى اليسار، وإشارة b السالبة تعني أن الإزاحة إلى أسفل.

✓ تحقق من فهمك

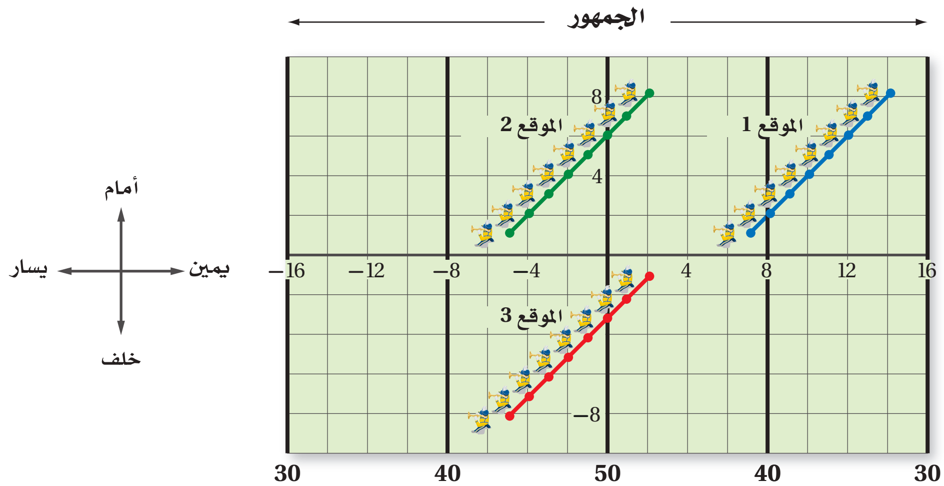
2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x-4, y-1)$

2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, -2), R(-9, -5), S(-4, -7), T(-4, -2)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x+7, y+1)$

مثال 3 من واقع الحياة

وصف الإزاحة

استعراض: في استعراضٍ لفرقةٍ عسكريةٍ، يسير الأفراد من الموقع **1** إلى الموقع **2** ثم إلى الموقع **3**، وكل وحدة على الشبكة تمثل خطوةً واحدةً.



a) اكتب قاعدةً لحركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع **1** إلى الموقع **2** ثم صفها لفظيًّا.

إحدى النقاط في الموقع 1 عند **(14, 8)**، وتحركت هذه النقطة إلى **(2, 8)** في الموقع 2، استعمل قاعدة الإزاحة $(x, y) \to (x + a, y + b)$ لكتابة معادلتين وحلِّهما لإيجاد قيمة كلٍّ من a , b.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, 8)$$

$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = 8$$

$$a = -12 \qquad b = 0$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \to (x - 12, y)$

أي أن كلًّا من أفراد الفرقة العسكرية تحرك 12 خطوةً إلى اليسار، ولم يتحرك أي خطوةٍ إلى الأمام أو إلى الخلف في أثناء انتقاله من الموقع 1 إلى الموقع 2

b) صِفْ حركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع **1** إلى الموقع **3** باستعمال قاعدة الإزاحة.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, -1)$$

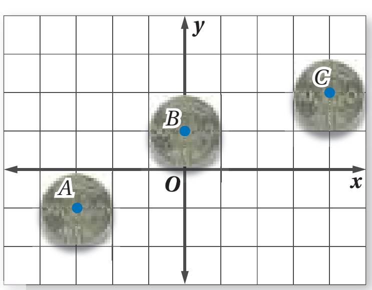
$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = -1$$

$$a = -12 \qquad b = -9$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \to (x - 12, y - 9)$

تحقق من فهمك

3) **نقود:** تمَّ تصوير حركة قطعة نقود في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.



A) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.

B) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة.

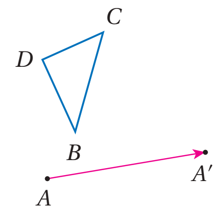
إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق: الإزاحة هي تحويل تطابق أيضًا، فهي تحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة.

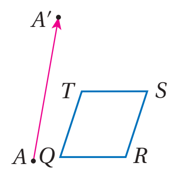
تأكـد

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ ممَّا يأتي:

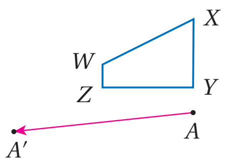
(1



(2



(3



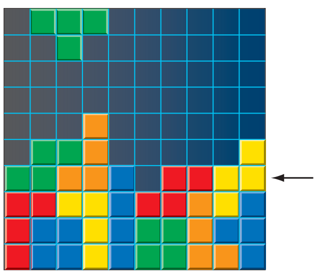
المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

(4 شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(2, 4), K(1, 1), L(5, 1), M(4, 4)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

(5 $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-8, 8), F(-10, 4), G(-7, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$

(6 متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-6, -5), X(-2, -5), Y(-1, -8), Z(-5, -8)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 4)$

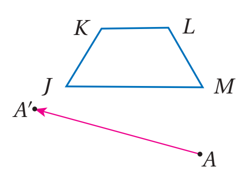
المثال 3 (7 **ألعاب فيديو:** إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم.



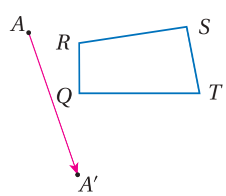
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ مما يأتي:

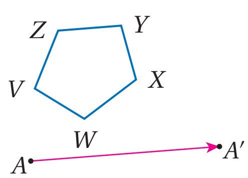
(8



(9



(10



المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

(11 $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 1)$

(12 المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, 4), R(-8, 2), S(-3, 2), T(-3, 4)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$

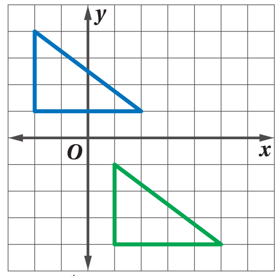
(13 الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, -2), G(-1, -1), H(0, -4), J(-3, -6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 6)$

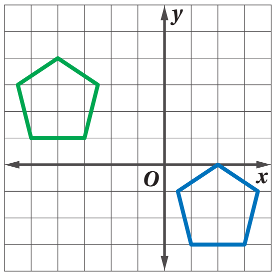
المثال 3 (14 **مواقع:** تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.

a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟

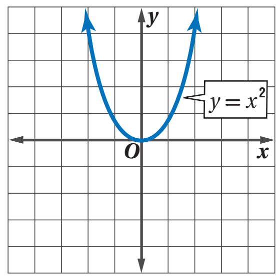
b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله.

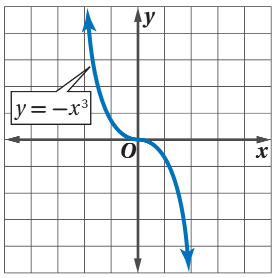
اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

15)


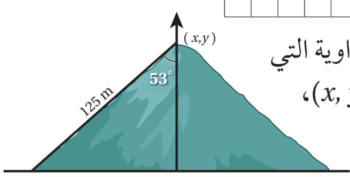
16)


جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة، ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

17) $(x, y) \to (x + 4, y + 1)$


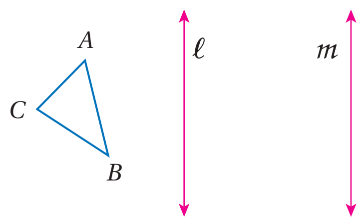
18) $(x, y) \to (x - 2, y)$


19) **تضاريس:** طول منحدر تلةٍ من قمتها حتى أسفلها 125 m، وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي $53°$، إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة.



20) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيَّين.

a) **هندسيًّا:** ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$، والمستقيمين الرأسيّين ℓ, m، وارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ، بطيِّ الورقة على امتداد المستقيم ℓ وسمِّ هذه الصورة $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m، بطيّ الورقة على امتداد المستقيم m، وسمِّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$.



b) **هندسيًّا:** كرِّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين n, p، وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين q, r.

c) **جدوليًّا:** انسخ الجدول الآتي وأكمله.

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
	ℓ, m		A و A''، B و B''، C و C''
	n, p		D و D''، E و E''، F و F''
	q, r		M و M''، N و N''، P و P''

d) **لفظيًّا:** صِفْ نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** أُجريت إزاحةٌ لشكلٍ ما، وفقًا للقاعدة: $(x, y) \to (x - 3, y + 8)$، ثم إزاحةٌ أخرى للصورة الناتجة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \to (x + 3, y - 8)$. من دون استعمال الرسم، حدِّد مكان الشكل النهائي وبرِّر إجابتك.

إرشادات للدراسة

انسحاب الدالة المتصلة:
عند إجراء تحويل هندسي على دالة متصلة تمثل بخطٍّ منحنٍ من دون انقطاع كما في السؤالين 17, 18، تبقى الدالة محافظة على شكلها كما هو الحال في تحويلات التطابق.

قراءة الرياضيات

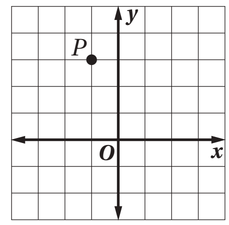
الشرطتان:
تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرأس صورة ناتجة عن تحويل هندسي ثانٍ.

22) **تحدٍّ:** أُزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟

23) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها.

تدريب على اختبار

24) أوجد صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ **C** $(2, -4)$

B $(0, 3)$ **D** $(2, 4)$

25) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سُحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ **B** $\frac{1}{11}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{5}{33}$

26) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟

مراجعة تراكمية

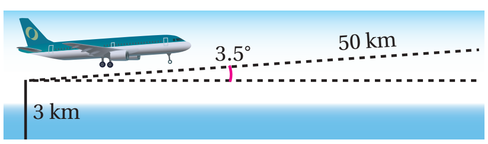
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد. (الدرس 1-3)

27) $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفَيها $D(4, 4), J(-3, 2)$، بالانعكاس حول المحور y.

28) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$، بالانعكاس حول المحور x.

29) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

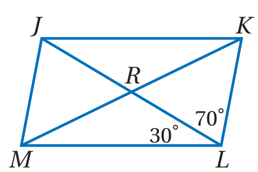
30) **الملاحة الجوية:** كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية $3.5°$، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتةً، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟ (مهارة سابقة)



أوجد كلًّا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$ المجاور. (الدرس 2-1)

31) $m\angle MJK$ **32)** $m\angle JML$

33) $m\angle JKL$ **34)** $m\angle KJL$

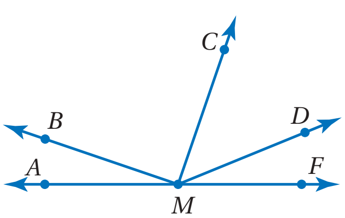


استعد للدرس اللاحق

صنّف كلًّا من الزوايا الآتية إلى قائمة أو حادة أو منفرجة، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

35) $\angle AMC$ **36)** $\angle FMD$

37) $\angle BMD$ **38)** $\angle CMB$



استكشاف 3-3

معمل الهندسة: الدوران Rotations

درست سابقًا التماثل الدوراني حول نقطة، والذي يحرك الشكل حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران بزاوية معينة وفي اتجاه محدد، وستستعمل الورق الشفاف في هذا النشاط لاستكشاف خصائص الدوران.

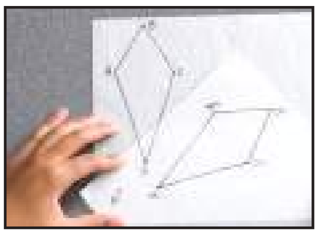
نشاط: استكشاف الدوران باستعمال الورق الشفاف

الخطوة 1: ارسم في قطعة من الورق الشفاف الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P.

الخطوة 1

الخطوة 2: انسخ الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P في قطعةٍ أخرى من الورق الشفاف، وسمّ الشكل الجديد $A'B'C'D'$.

الخطوة 3: ضع الورقتين بحيث تنطبق النقطة P من الأولى على النقطة P من الثانية، ودوّر الورقتين بحيث لا يكون هناك تداخل بين $ABCD$، و $A'B'C'D'$، وألصق الورقتين معًا.



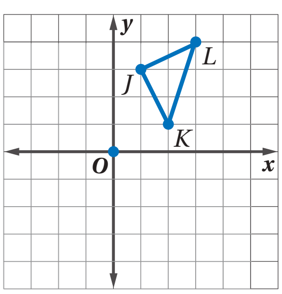
الخطوتان 2, 3

الخطوة 4: قِس المسافة بين النقطة P وكل رأس من رؤوس الشكلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$، ثم انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

تمارين:

1) انسخ $\triangle JKL$ الموضح في الشكل المجاور الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(1, 3)$, $K(2, 1)$, $L(3, 4)$ في قطعة من الورق الشفاف ثم أجب عما يأتي:



a) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير كل رأس بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

b) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير $\triangle JKL$ بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من النقاط J, K, L. ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من رؤوس المثلثين $J'K'L'$, $J''K''L''$.

2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة $(4, 2)$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاويةٍ $90°$، وبزاوية $180°$، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x وعلى الإحداثي y لهذا النقطة في كل حالة؟

3) **تخمين:** ما إحداثيًا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

4) **تخمين:** اكتب تخمينًا حول المسافة بين مركز الدوران P، والرؤوس المتناظرة للشكلين $ABCD$, $A'B'C'D'$ في النشاط أعلاه.

الدوران
Rotations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا؟

استُعملت الطاقة المتولدة من المراوح الهوائية في الماضي؛ لضخِّ الماء أو لطحن الحبوب، أما في الوقت الحاضر، فيمكن أن تكون مراوح الهواء الحديثة بديلًا مهمًّا عن الوقود الأحفوري (النفط والغاز والفحم). إذ تُحوِّل هذه المراوح طاقة الرياح إلى طاقة كهربائية.

فيما سبق:

درستُ التماثل الدوراني حول نقطة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكل مستعملًا المنقلة.
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكل في المستوى الإحداثي.

المفردات:

الدوران
rotation

مركز الدوران
center of rotation

زاوية الدوران
angle of rotation

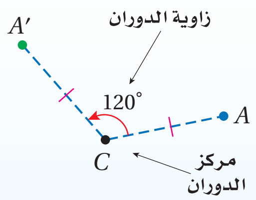
رسم الأشكال الناتجة عن الدوران: تعلمت أن الدوران يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

مفهوم أساسي — الدوران

أضف إلى مطويتك

الدوران حول نقطة ثابتة (تسمى **مركز الدوران**) بزاوية معينة قياسها $x°$ واتجاهٍ معين، يحول النقطة إلى صورتها بحيث:

- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن صورتها هي النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعُدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكِّلة من النقطة ومركز الدوران والصورة تُسمى **زاوية الدوران** وقياسها يساوي $x°$.



A' هي صورة A الناتجة عن دوران بزاوية $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة C.

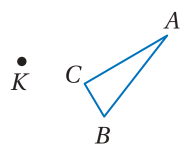
يمكن أن يكون اتجاه الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ومن الآن فصاعدًا سيكون كل دوران عكس اتجاه حركة عقارب الساعة إلا إذا ورد خلاف ذلك.

إرشادات للدراسة

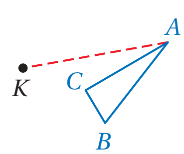
تحويلات التطابق: الدوران هو تحويل تطابق أيضًا، فهو يحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة، حيث تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

مثال 1 رسم الشكل الناتج عن الدوران

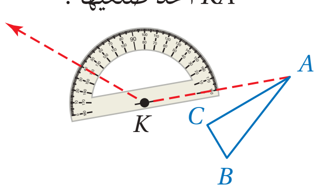
استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن دوران بزاوية $140°$ حول النقطة K.



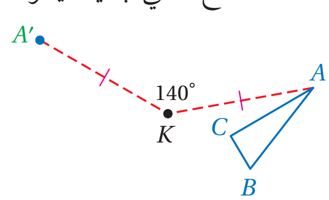
الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً من الرأس A إلى النقطة K.



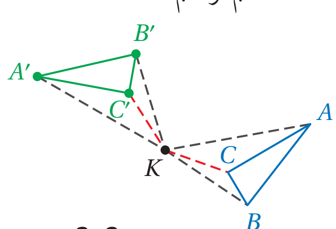
الخطوة 2: ارسم زاويةً قياسها $140°$ تكون $\overline{KA}$ أحد ضلعَيها .



الخطوة 3: استعمل مسطرةً لتعيين A' على الضلع الثاني، بحيث يكون $KA' = KA$.



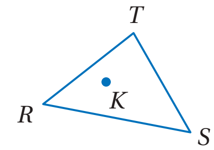
الخطوة 4: كرِّر الخطوات 3–1 للرأسين B و C ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



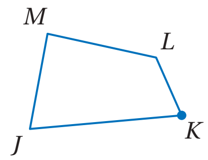
تحقق من فهمك

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

1A) $65°$



1B) $170°$



رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي: يمكنك استعمال القواعد الآتية لتحديد صورة نقطةٍ ما، عندما يتم تدويرها بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — الدوران في المستوى الإحداثي

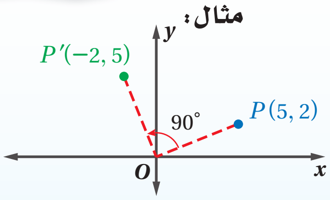
أضف إلى مطويتك

الدوران بزاوية $90°$

عند تدوير نقطة بزاوية $90°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال:

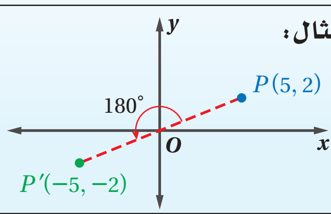


الدوران بزاوية $180°$

عند تدوير نقطة بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلًا من الإحداثيَّين x, y في -1

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال:

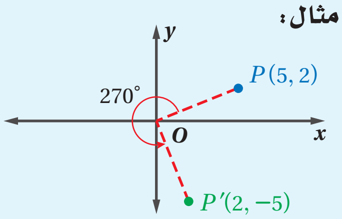


الدوران بزاوية $270°$

عند تدوير نقطة بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال:



إرشادات للدراسة

الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة: يُشير قياس زاوية الدوران السالب إلى أن الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة. فالدوران بزاوية $-90°$ حول نقطة الأصل هو دوران بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

إرشادات للدراسة

الدوران بزاوية $360°$: الدوران بزاوية $360°$ حول نقطةٍ ما يُعيد الشكل إلى وضعه الأصلي؛ أي أن الصورة الناتجة عن دوران بزاوية $360°$ هي الشكل الأصلي نفسه.

مثال 2 — الدوران في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(4, 5), R(5, 1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 ثم بدّل الإحداثيَّين.

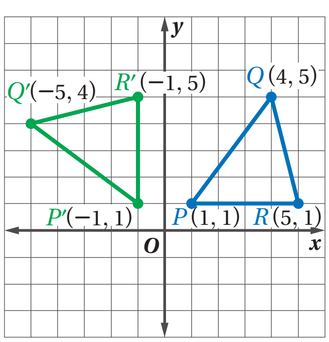
$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$

$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$

$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$

ثم مثِّل $\triangle PQR$ وصورته $\triangle P'Q'R'$ في المستوى الإحداثي.

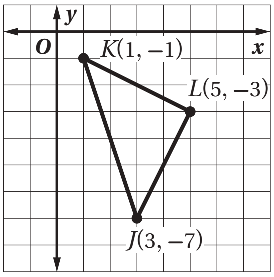


تحقق من فهمك

2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي: $F(2, 1), G(7, 1), H(6, -3), J(1, -3)$.
مثِّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

مثال 3 من اختبار

ما صورة النقطة J الناتجة عن دوران $\triangle JKL$ بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل؟



A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

اقرأ سؤال الاختبار

لقد أعطيت $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, -7), K(1, -1), L(5, -3)$، وطُلب إليك أن تحدد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حُل سؤال الاختبار

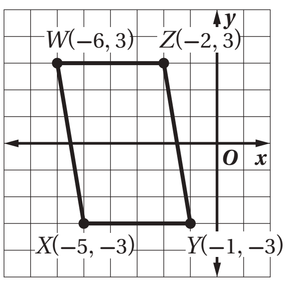
لإيجاد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن الدوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1، ثم بدّل الإحداثيَّين x , y

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $\qquad$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

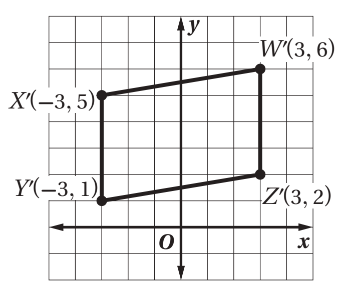
فالإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

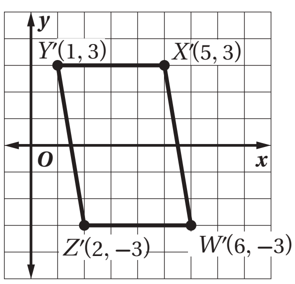
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ في الشكل المجاور بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أيُّ الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟



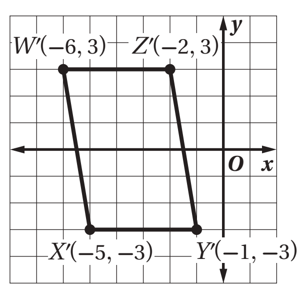
A



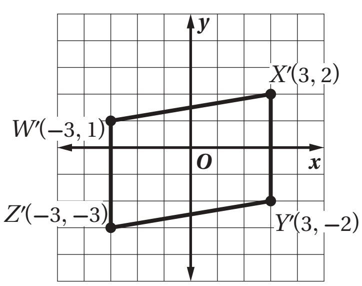
C



B



D



إرشادات للدراسة

الدوران $270°$: يمكن إجراء دوران بزاوية $270°$ بعمل دورانين متعاقبين؛ أحدهما بزاوية $90°$ والآخر بزاوية $180°$، كما يمكن إجراء هذا الدوران أيضًا بعمل دوران بزاوية $90°$ في اتجاه عقارب الساعة.

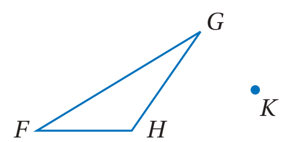
إرشادات للاختبار

حل مسألة أبسط: يمكنك أن تتحقق من صورة رأس واحد فقط مثل النقطة X هنا، بدلًا من التحقق من صور رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ الأربعة كلها، فإذا كانت صحيحة فأكمل للرؤوس الباقية، وإلا فانتقل إلى شكل آخر.

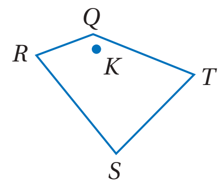
تأكـد

المثال 1 استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $45°$



2) $240°$

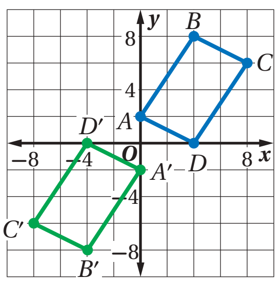


المثال 2 **3)** إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي: $D(-2, 6)$, $F(2, 8)$, $G(2, 3)$، مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل .

المثال 3 **4)** **اختيار من متعدد:** الشكل المجاور يبيّن الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.
ما قياس زاوية الدوران؟

A $90°$ **C** $270°$

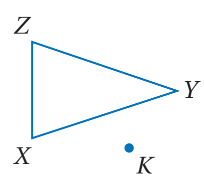
B $180°$ **D** $360°$



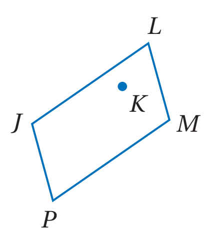
تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

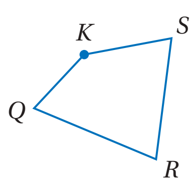
5) $90°$



6) $145°$



7) $260°$



المثالان 2, 3 مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-3, 4), X(0, 7), Y(3, 4), Z(0, 1)$ ، $90°$

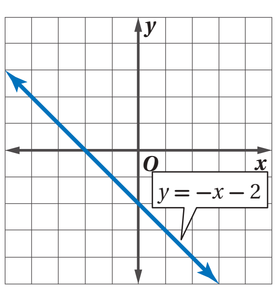
9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$ ، $180°$

10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-6, 3), P(-2, 3), Q(-3, -2), V(-7, -2)$ ، $270°$

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = -x - 2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صِفِ العلاقة بين المستقيم الأصلي وصورته.

11) $90°$ **12)** $180°$

13) $270°$ **14)** $360°$



جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم الناتجة عن دورانه بالزاوية المحددة حول نقطة تقاطعه مع المحور x وحول نقطة تقاطعه مع المحور y في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $y = x - 5$ ، $90°$

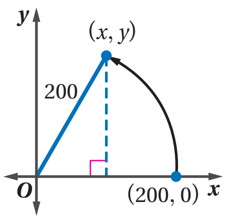
16) $y = 2x + 4$ ، $180°$

17) $y = 3x - 2$ ، $270°$

الربط مع الحياة

تتحمل إطارات الدراجات ما يصل إلى **400** مرّة من وزنها، ولا تتحطم إلا تحت حمل يعادل **700** مرّة من وزنها.

18) **سباق الدراجات:** يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft

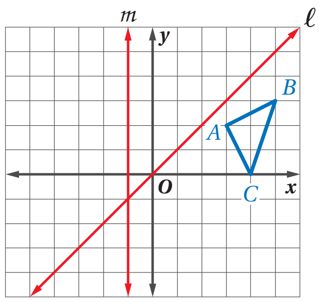


a) إذا بدأ السباق من النقطة $(200, 0)$ وأتمَّ الاثنان دورة واحدة في 30 ثانيةً، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورةً، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقةً، فمن الفائز؟

19) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.

a) **هندسيًّا:** في المستوى الإحداثي المجاور، رسم $\triangle ABC$ والمستقيمان المتقاطعان ℓ, m.
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ.
وسمّها $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m. وسمّها $\triangle A''B''C''$.



b) **هندسيًّا:** كرِّر العملية السابقة مرتين في رُبعين مختلفين، سمّ المثلث الثاني DEF ، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين n, p. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r.

c) **جدوليًّا:** قِسْ زاوية الدوران لكل مثلثٍ حول نقطة تقاطع المستقيمين، وانسخ الجدول الآتي وأكمله.

قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين		قياس زاوية الدوران بين الشكلين	
ℓ, m		$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$	
n, p		$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$	
q, r		$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$	

d) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

إرشادات للدراسة

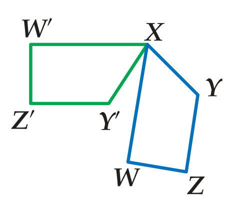
علاقة الدوران بالانعكاس:
إن إجراء انعكاسين متعاقبين حول مستقيمين متقاطعين يمثل دورانًا حول نقطة تقاطع المستقيمين.

مسائل مهارات التفكير العليا

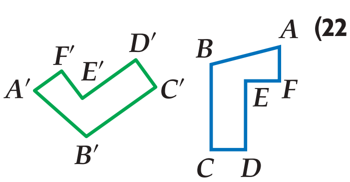
20) **تحدٍّ:** إحداثيَّا النقطة C هما $C(5, 5)$، وإحداثيَّا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$، أوجد إحداثيَّي مركز الدوران. وضّح إجابتك.

يظهر في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P، انسخ في دفترك كلًّا من الشكلين وحدِّد موقع النقطة P ، ثم أوجد قياس زاوية الدوران.

21)



22)



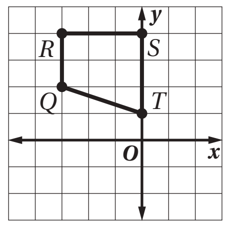
23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، وصف دورانًا زاويته لا تساوي الصفر، وتنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي أحدهما على الآخر.

24) **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية $180°$؟ وضِّح إجابتك.

25) **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاطٍ ثابتةٍ أبدًا؟

تدريب على اختبار

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟



A $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

27) يرتكز سُلَّم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عُشر قدم؟

A 10.0 ft

B 16.1 ft

C 19.7 ft

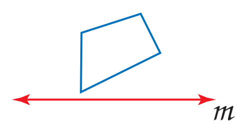
D 26.0 ft

مراجعة تراكمية

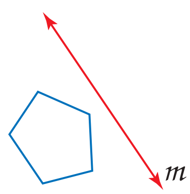
28) **براكين:** تحركت سُحُب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و 48 km شمالًا.
ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حُبيبات الغبار، ثم أوجد طول أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه. (مهارة سابقة)

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

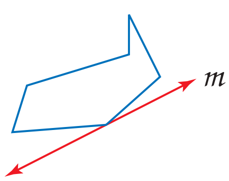
29)



30)



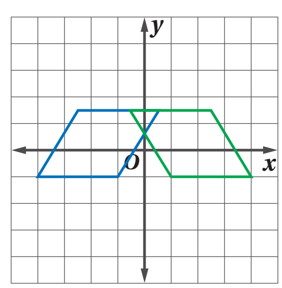
31)



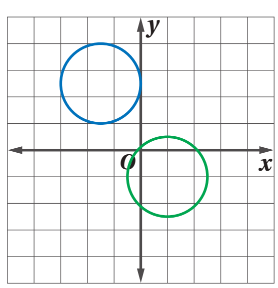
استعد للدرس اللاحق

صنِّف التحويل المبيَّن في كلٍّ من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

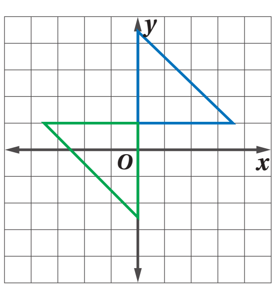
32)



33)



34)



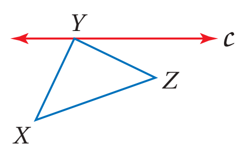
الفصل 3

اختبار منتصف الفصل

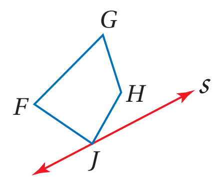
الدروس 1-3 إلى 3-3

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى. (الدرس 1-3)

1)



2)

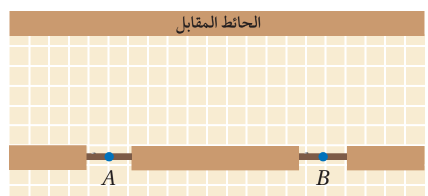


مثل كلًّا من الشكلين الآتيين بيانيًّا، ثم ارسم صورة كلٍّ منهما بالانعكاس المحدد: (الدرس 1-3)

3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$، بالانعكاس حول المحور y.

4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$، بالانعكاس حول المحور x.

5) **احتفالات:** وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال؛ لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة، بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة مستخدمًا الانعكاس. (الدرس 1-3)



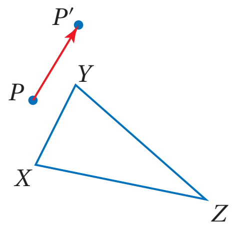
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-3)

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

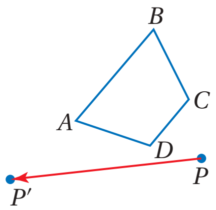
7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$، إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (الدرس 2-3)

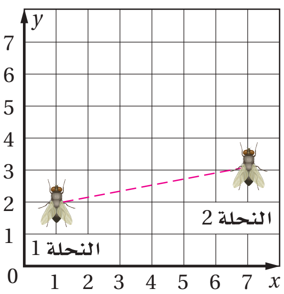
8)



9)

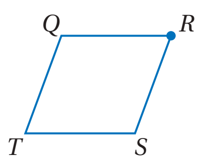


10) **قصص مصورة:** يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني؛ ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا ونحلتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل النحلة 1 إلى موقع النحلة 2؟ (الدرس 2-3)

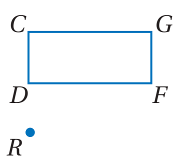


استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-3)

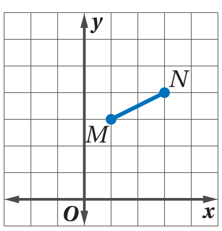
11) $45°$



12) $60°$



13) **اختيار من متعدد:** ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-3)



A $(-3, 1)$ **C** $(-1, -3)$

B $(-3, -1)$ **D** $(3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-3)

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، وزاوية دورانه $90°$

15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$، وزاوية دورانه $180°$

استكشاف

3-4

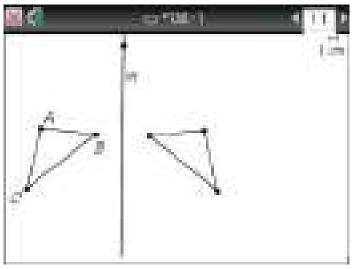
معمل الحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

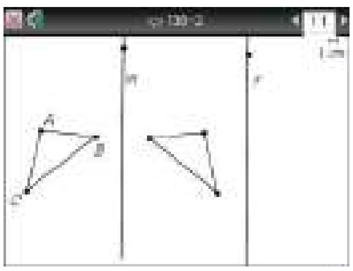
ستستعمل الحاسبة البيانية TI–nspire في هذا المعمل؛ لاستكشاف أثر إجراء عدة تحويلاتٍ هندسيةٍ على شكلٍ هندسيٍّ.

نشاط: انعكاس شكل حول محورين رأسيين



الخطوة 1: ارسم مثلثًا وسمّه.

- افتح الآلة بالضغط على on، ثم ارسم مثلثًا بالضغط على مفتاح: menu، ثم اختار 5:الأشكال الهندسية ومنها 2:مثلث، ثم الضغط على ثلاث مواقع لاختيار نقاط المثلث، قم بتحديد ثلاث نقاط يظهر المثلث، ثم اضغط esc.
- سمّ المثلث ABC، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة رأس، ثم الضغط على ctrl menu، ثم اختار 2:التسمية، وكتابة اسم النقطة بالضغط على shift ثم الحرف؛ لجعل الحروف كبيرة، والضغط على enter بعد كل تسمية.

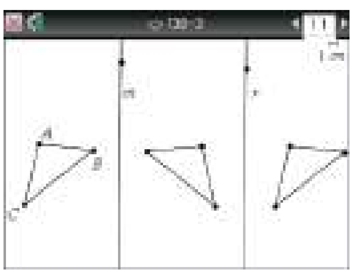


الخطوة 2: ارسم مستقيمًا عن يمين $\triangle ABC$ وسمّه.

- ارسم مستقيمًا بالضغط على المفاتيح menu. ثم اختيار 4:النقاط والمستقيمات ومنها 4:مستقيم ثم ارسم المستقيم بتحديد نقطة عن يمين $\triangle ABC$، ثم الضغط على enter ثم esc.
- سمّ المستقيم m بالضغط على المستقيم، ثم على المفاتيح ctrl menu، ثم اختيار 2:التسمية وسمّه m واضغط enter.

الخطوة 3: ارسم انعكاسًا لـ $\triangle ABC$ حول المستقيم m.

- ارسم انعكاس $\triangle ABC$ حول المستقيم m بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار 8:التحويل الهندسي ومنها 2:الانعكاس، ثم الضغط على المستقيم والمثلث ليظهر الانعكاس.



الخطوة 4: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ m.

- ارسم مستقيمًا عن يمين المثلث الناتج بحيث يكون موازيًا لـ m وسمّه r بالضغط على مفتاح menu ثم اختار 7:الإنشاء الهندسي ومنها 2:مستقيم موازٍ.
- اضغط على المستقيم m والنقطة المطلوب رسم r عندها عن يمين المثلث الناتج من الخطوة 3

الخطوة 5: كرّر العملية التي نفذتها في الخطوة 3؛ لرسم صورة الشكل الجديد بالانعكاس حول المستقيم r.

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟
2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟
3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟
4) **خمّن:** إذا أُجري انعكاس لهذا الشكل حول مستقيمٍ ثالثٍ، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.
5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يُستعمل للحصول على الشكل النهائي؟
6) **خمّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيمٍ ثالثٍ يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

4-3 تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس والانسحاب والدوران.

(الدروس 3-3 ,3-2 ,3-1)

والآن:

- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس.
- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين .

المفردات:

التحويل الهندسي المركب
composite transformation

تركيب إزاحة انعكاس
glide reflection

لماذا؟

يوضح نمط آثار الأقدام على رمال الشاطئ في الصورة المجاورة إجراء تحويلين هندسيين مختلفين هما الإزاحة والانعكاس.

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية هو تركيب لتحويلين هندسيين، ويُسمى **تحويلًا هندسيًّا مركبًا**. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الهندسي الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس.

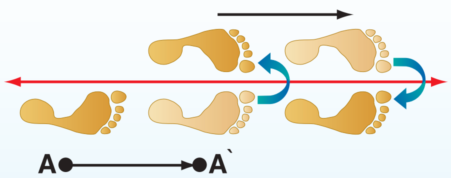
مفهوم أساسي — تركيب إزاحة انعكاس

أضف إلى مطويتك

تركيب إزاحة انعكاس هو تحويل هندسي مركب ينتج عن إزاحة يليها انعكاس في خطٍّ مستقيمٍ موازٍ لخط اتجاه الإزاحة.

مثال:

تركيب إزاحة انعكاس المجاور هو تحويل هندسي مركب ينقل الشكل في اتجاه الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة ′A مع انعكاسٍ حول المستقيم l.



مثال 1 — تمثيل تركيب الإزاحة والانعكاس بيانيًّا

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(6, -1), K(10, -2), L(5, -3)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن إزاحةٍ مقدارها 4 وحداتٍ إلى أعلى ثم انعكاس حول المحور y .

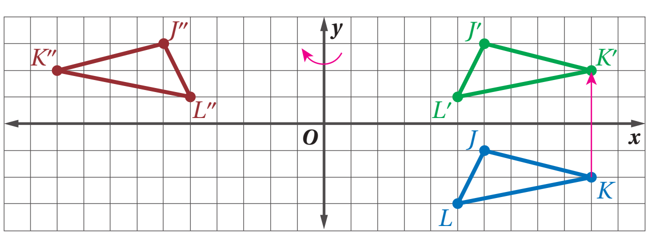
الخطوة 1: الإزاحة 4 وحدات إلى أعلى

(x, y)	$\rightarrow$	$(x, y+4)$
$J(6, -1)$	$\rightarrow$	$J'(6, 3)$
$K(10, -2)$	$\rightarrow$	$K'(10, 2)$
$L(5, -3)$	$\rightarrow$	$L'(5, 1)$

الخطوة 2: الانعكاس حول المحور y

(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, y)$
$J'(6, 3)$	$\rightarrow$	$J''(-6, 3)$
$K'(10, 2)$	$\rightarrow$	$K''(-10, 2)$
$L'(5, 1)$	$\rightarrow$	$L''(-5, 1)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$.



إرشادات للدراسة

تمييز التحويلات الهندسية: يستخدم السهم ← للدلالة على الانسحاب، بينما يستخدم السهم ↶ للدلالة على الانعكاس. أما صورة الصورة فستكون باللون البنيّ.

✓ تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(2, 5), R(4, 2)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .

1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

في المثال 1 تلاحظ أنّ: $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$، و كذلك: $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$ ، وبحسب خاصية التعدي للتطابق فإن: $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقود إلى النظرية الآتية:

نظرية 3.1 تركيب تحويلات التطابق

أضف إلى مطويتك

تركيب تحويلَي تطابق (أو أكثر) هو تحويل تطابق أيضًا.

ستبرهن النظرية 3.1 في السؤال 20

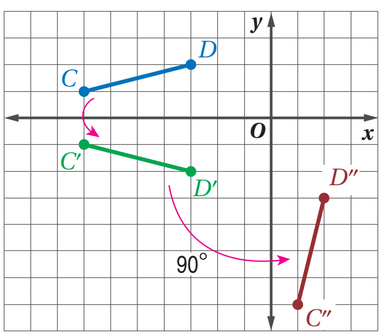
> **إرشادات للدراسة**
>
> **تحويلات التطابق:** إنّ الانعكاس والإزاحة والدوران والتحويلات المركبة منها، هي تحويلات تطابق أيضًا.

لذا فإن الصورة الناتجة عن تركيب أي تحويلين هندسيين من تحويلات التطابق كالإزاحة أو الانعكاس أو الدوران تكون مطابقةً للشكل الأصلي.

> **قراءة الرياضيات**
>
> **الشرطتان:** تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرأس صورة ناتجة من تحويل هندسي ثان.

مثال 2 تمثيل تركيب تحويلَي تطابق بيانيًّا

إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1), D(-3, 2)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.



الخطوة 1: الانعكاس حول المحور x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$

$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $90°$

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$

$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

✓ تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(-6, -2), B(-5, -5), C(-2, -1)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y .

2B) دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

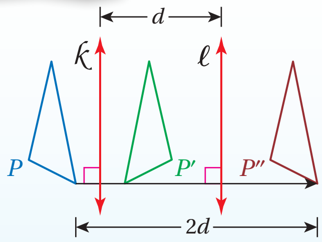
تركيب انعكاسين: إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة.

نظرية 3.2 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

أضف إلى مطويتك

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

- اتجاهها عموديًا على كلٍّ من المستقيمين.
- مقدارها يساوي ضعف المسافة بين المستقيمين المتوازيين.



ستبرهن النظرية 3.2 في السؤال 26

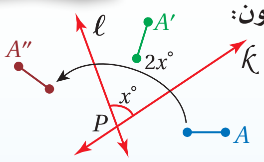
إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانًا .

نظرية 3.3 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

أضف إلى مطويتك

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:

- مركزه هو نقطة تقاطع المستقيمين.
- قياس زاويته يساوي ضعف قياس الزاوية التي يشكّلها تقاطع هذين المستقيمين.



ستبرهن النظرية 3.3 في السؤال 27

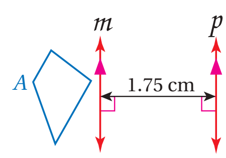
تنبيه !

ترتيب التركيب: احرص على تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في المسألة.

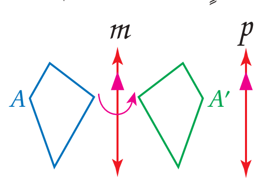
مثال 3 رسم الصورة الناتجة عن انعكاسين حول مستقيمين

ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل A إلى A'' في كلٍّ ممَّا يأتي:

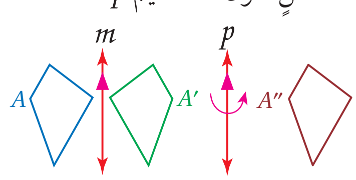
(a



الخطوة 1: ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m .

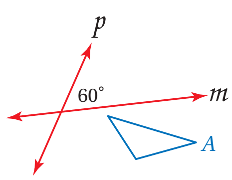


الخطوة 2: ارسم صورة الشكل A' الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم p.

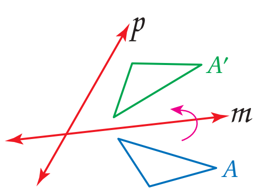


بناءً على النظرية 3.2، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتوازيين m, p يكافئ إزاحة أفقيةً إلى اليمين مقدارها $2 \times 1.75 = 3.5$ cm

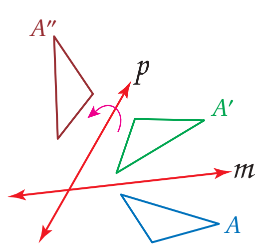
(b



الخطوة 1:



الخطوة 2:



بناءً على النظرية 3.3، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتقاطعين m, p يكافئ دورانًا بزاوية تساوي $2 \times 60°$ أي $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m, p

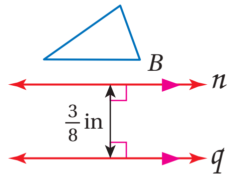
تاريخ الرياضيات

فيلكس كلاين
(1849–1925)
هو عالم رياضيات ألماني عرّف الهندسة بأنها دراسة خصائص الفضاء التي تبقى دون تغيير تحت تأثير مجموعة من التحويلات الهندسية.

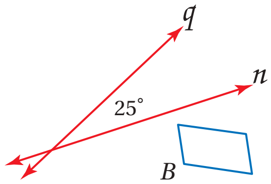
تحقق من فهمك

ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل B إلى B'' .

3A)



3B)



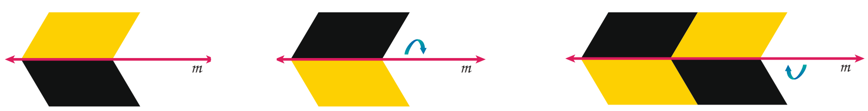
يتم إنشاء كثيرٍ من الأنماط في الحياة الواقعية باستعمال تركيب التحويلات الهندسية.

مثال 4 من واقع الحياة — وصف التحويلات الهندسية

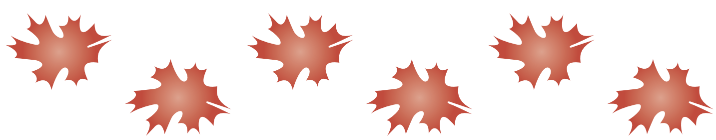
أنماط: صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا، يمكن استعماله لتكوين النمط في كلٍّ ممَّا يأتي:

a)

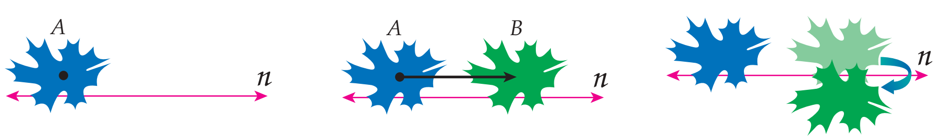
يمكن تكوين هذا النمط بتركيب انعكاس وإزاحة الشكلين المتقابلين (وحدة النمط)، بتركيب انعكاس حول المستقيم m، ثم إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم m كما في الشكل أدناه. لاحظ أن المستقيم m يمرُّ في منتصف الشكل الأصلي (وحدة النمط).



b)



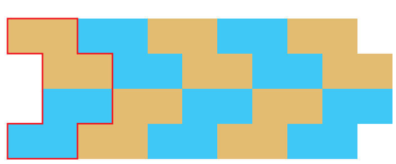
تمَّ تكوين هذا النمط بتركيب إزاحة وانعكاس؛ أي أنه يمكن تكوينه بتركيب إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم n تنقل A إلى B متبوعةً بانعكاسٍ حول المستقيم n كما في الشكل الآتي.



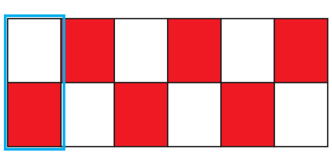
تحقق من فهمك

4) **سجاد:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مِّمَّا يأتي:

A)



B)



الربط مع الحياة

تستعمل تحويلات هندسية مركبة عند تصميم السجاد، لاحظ تكرار الجزء نفسه في إطار السجادة أعلاه.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

تركيب التحويلات الهندسية

الإزاحة	الدوران
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين .	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين .

تأكد

المثال 1 إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي: $C(-5, -1), D(-2, -5), E(-1, -1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

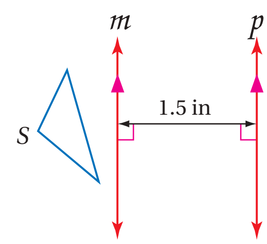
1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x

2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

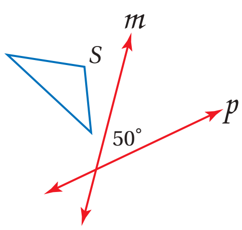
المثال 2 **3)** إحداثيات طرفَي $\overline{JK}$ هما $J(2, 5), K(6, 5)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

المثال 3 ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''.

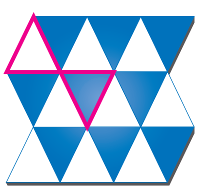
4)



5)



المثال 4 **6)** **أنماط البلاط:** صنع راشدٌ نمطًا من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صِفِ التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(1, -4), S(6, -4), T(5, -1)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

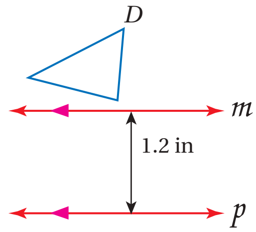
8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(2, 8), F(1, 2), G(4, 6)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

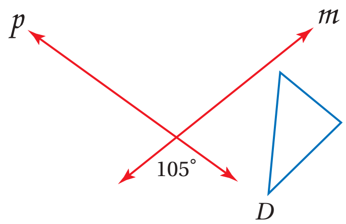
المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $\overline{WX}$، حيث $W(-4, 6), X(-4, 1)$، انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

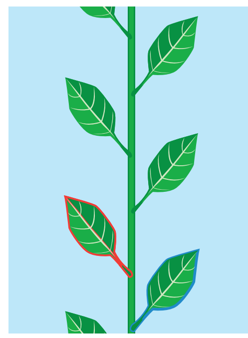
10) $\overline{RS}$، حيث $R(2, -1), S(6, -5)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y

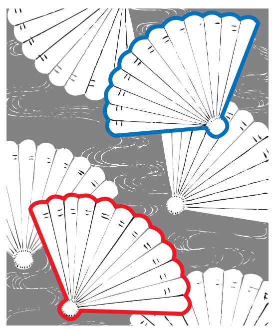
المثال 3 ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''.

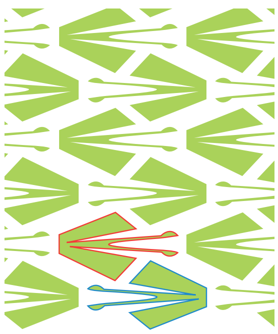
(11


(12


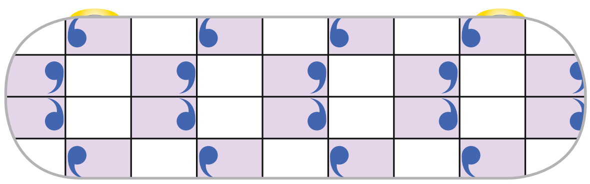
المثال 4 صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كلٍّ ممَّا يأتي:

(13


(14


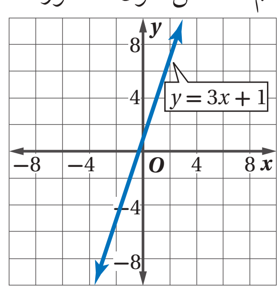
(15


16) **زلّاجات:** رسم صالح على زلاجته نمطًا، ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟

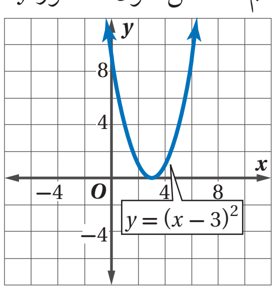


جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:

17) دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل ثم انعكاس حول المحور x



18) انعكاس حول المحور x ثم انعكاس حول المحور y

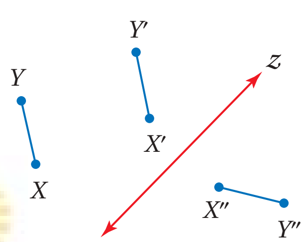


19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$.

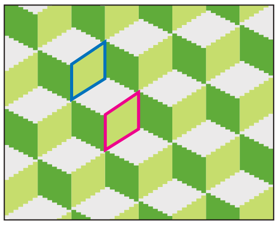
20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 3.1 (تركيب تحويلات التطابق).

المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدةً إلى اليمين و b وحدةً إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$



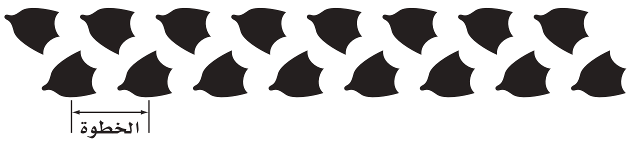
21) حياكة: تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور، صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط.

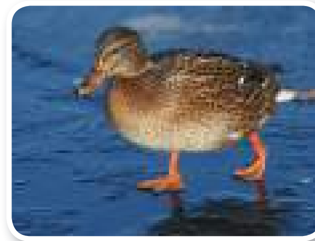


آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، وصِفِ التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

22) طائر الحبش

23) البطة





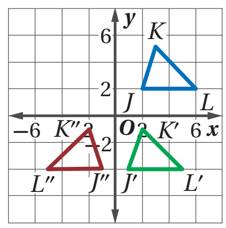
الربط مع الحياة

طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدمٍ متتاليين.

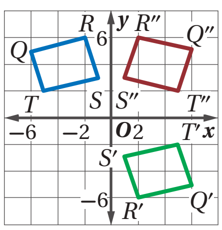
فمتوسط طول خطوة طائر الحبش 11 in تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة 5 in تقريبًا.

صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

24)



25)



26) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 3.2

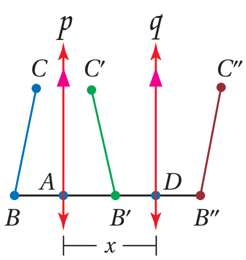
المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$،

وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.

المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $BB'' = 2x$



27) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 3.3

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

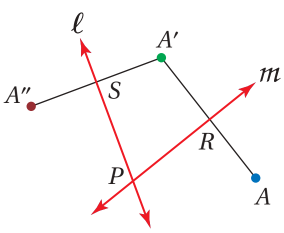
A نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: a) إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m،

ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ،

فإن A'' تكون صورة A بدورانٍ حول النقطة P.

b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

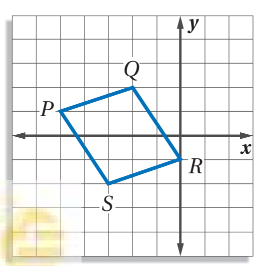


إرشادات للدراسة

مراجعة: عُد إلى الدرس 7–1 لمراجعة خصائص تطابق القطع المستقيمة.

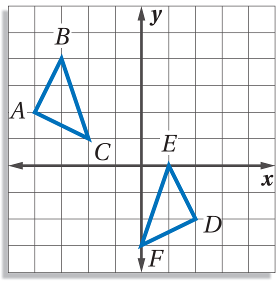
مسائل مهارات التفكير العليا

28) تحدٍّ: إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل، ثم عُكست الصورة حول المستقيم $y = -1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟



29) **تبرير:** إذا أُجري انعكاسان متعاقبان بشكلٍ ما؛ أحدهما حول المستقيم $y = x$، والآخر حول المحور x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين في الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك .

30) **مسألة مفتوحة:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.



31) **تبرير:** إذا أُخضع شكلٌ ما لدورانين، فهل لترتيب الدورانين تأثير في موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟

32) **اكتب:** هل تبقى أي نقاط ثابتةً في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$؟

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

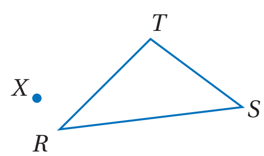
B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

34) **إجابة قصيرة:** إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$، إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى، ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟

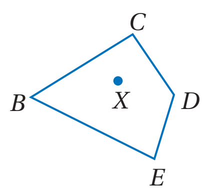
مراجعة تراكمية

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 3-3)

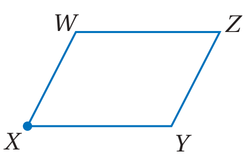
35) $60°$



36) $120°$



37) $180°$



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 3-2)

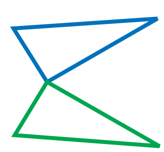
38) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $F(1, -4), G(3, -1), H(7, -1)$ ؛ إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.

39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 7), B(-1, 4), C(2, 3), D(2, 7)$ ؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.

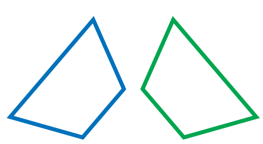
استعد للدرس اللاحق

يبيِّن كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاسٍ حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس.

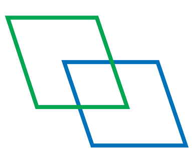
40)



41)



42)

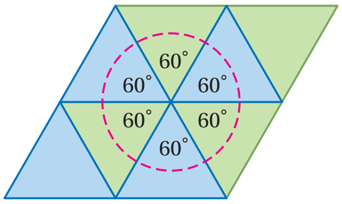


توسع

3-4 معمل الهندسة: التبليط
Tessellation

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa



التبليط نمطٌ يتكون من شكل أو أكثر، يغطِّي سطحًا من دون تقاطعات أو فراغات، ويكون مجموع قياسات الزوايا حول كل رأس في التبليط °360

و**التبليط المنتظم** هو التبليط الذي يُستعمل فيه نوع واحد فقط من المضلعات المنتظمة، ويمكن تبليط سطحٍ بمضلعٍ منتظم، إذا كان قياس زاويته الداخلية أحد عوامل العدد 360، ويمكن عمل تبليط باستعمال أكثر من نوعٍ واحدٍ من المضلعات المنتظمة، ويسمى التبليط الذي يتكون من مضلعين منتظمين أو أكثر **تبليطًا شبه منتظمٍ**.

نشاط 1 التبليط المنتظم

حدِّد ما إذا كان استعمال كلٍّ من المضلعين المنتظمين الآتيين لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا، فسِّر إجابتك.

a) مضلع سداسي

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم يساوي $x°$

$x = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

$= \frac{(n-2) \cdot 180°}{6}$ $n = 6$

$= 120°$ بالتبسيط

وبما أن 120 أحد عوامل 360، فإنه يمكن استعمال المضلع السداسي المنتظم لتبليط المستوى.

b) مضلع عشاري

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للعشاري المنتظم يساوي x.

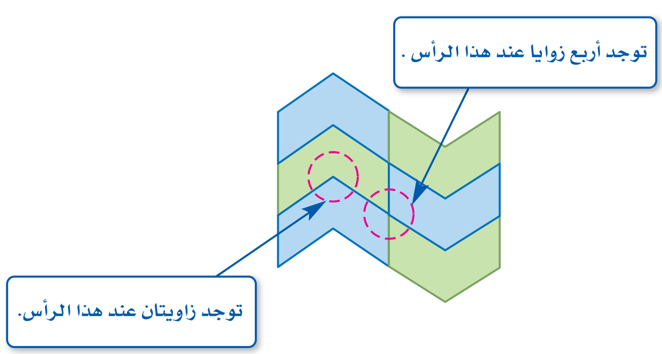
$x = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

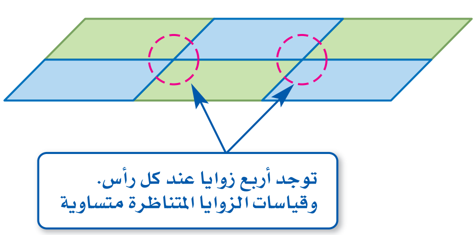
$= \frac{(n-2) \cdot 180°}{10}$ $n = 10$

$= 144$ بالتبسيط

وبما أن 144 ليست من عوامل 360، إذن لا يمكن استعمال العشاري المنتظم لتبليط المستوى.

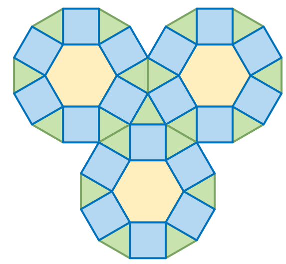
يقال: إن التبليط **متَّسق** إذا احتوى الترتيب نفسه من الأشكال والزوايا عند كل رأس.





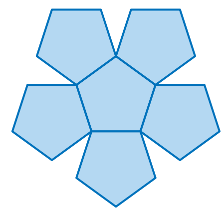
نشاط 2 تصنيف التبليط

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظم أو غير منتظمٍ وإلى متسقٍ أو غير متسقٍ.

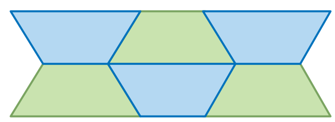
a)


بما أنه لا توجد فراغات في الشكل، وليس هنالك تقاطعات، فإن هذا النمط يشكِّل **تبليطًا**، وهذا التبليط يتكون من أشكال سداسية منتظمة ومربعات ومثلثات متطابقة الأضلاع، إذن هو تبليط **شبه منتظم** .

بما أنه عند بعض الرؤوس يوجد 5 زوايا، وعند بعضها 4 زوايا، ، إذن هذا التبليط **غير متسق**.

b)


توجد فراغات في الشكل فهذا النمط **ليس تبليطًا**.

c)


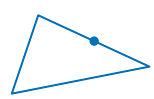
لا توجد فراغات ولا تقاطعات في هذا النمط فهو **تبليط** .
يتكون هذا التبليط من شبه منحرف، وهو مضلع **غير منتظم**؛ لذا فهذا التبليط **غير منتظم**، لكنه **متسق**؛ لأنه يحتوي على ترتيبات الأشكال نفسها والزوايا نفسها عند كل رأسٍ.

يمكن استعمال خصائص التبليط؛ لتصميم وإنشاء أشكال تبليط مختلفة.

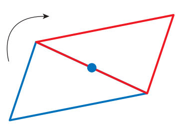
نشاط 3 رسم التبليط

ارسم مثلثًا واستعمله لإنشاء تبليط.

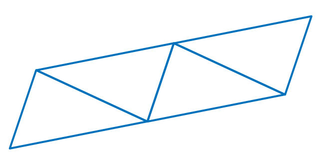
الخطوة 1: ارسم مثلثًا وعيّن نقطةً منتصف أحد أضلاعه.



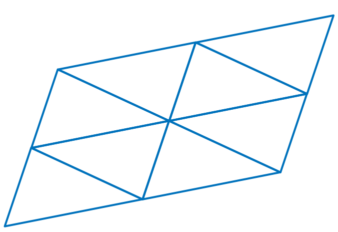
الخطوة 2: دوّر المثلث بزاوية °180 في اتجاه عقارب الساعة حول تلك النقطة.



الخطوة 3: اعمل إزاحة للمثلثين لتكوّن صفًّا.



الخطوة 4: اعمل إزاحة للصف لتكون تبليطًا.



نشاط 4 إنشاء تبليط باستعمال الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire

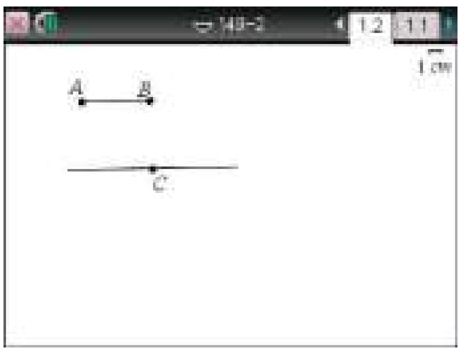
الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً.

- افتح تطبيق الهندسة بالضغط على المفاتيح on

ارسم قطعةً مستقيمةً بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات، ثم 5: قطعة مستقيمة، واضغط في موقعين لتظهر القطعة المستقيمة.

- سمّ القطعة المستقيمة التي رسمتها، بوضع المؤشر عند أحد طرفَيها، ثم اضغط menu ctrl واختار 2: التسمية ثم اضغط shift (ليكون الحرف كبيرًا) واكتب A، وبالمثل سمِّ الطرف الآخر B.

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{AB}$.

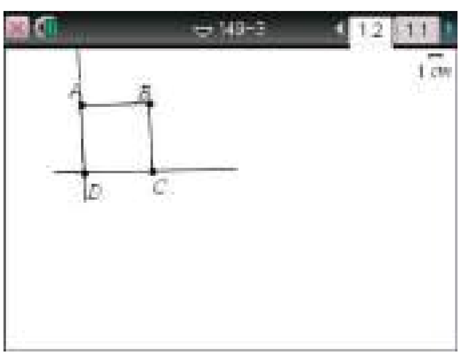


- ارسم نقطةً أسفل $\overline{AB}$، وذلك بالضغط على menu، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات، ثم 1: نقطة في المستوى، ثم الضغط على الموقع المراد للنقطة C.

- سمّ النقطة المرسومة، بوضع المؤشر عند النقطة والضغط على menu ctrl ثم اختار 2: التسمية ثم الضغط على shift وكتابة C.

- ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{AB}$ ويمر بالنقطة C، بالضغط على menu ثم اختار 7: الإنشاء الهندسي، ومنها 2: مستقيم موازٍ ثم الضغط على القطعة $\overline{AB}$ والنقطة C.

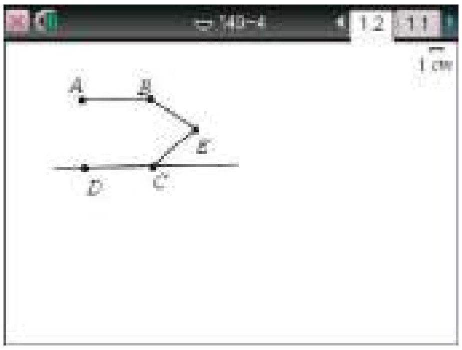
الخطوة 3: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{BC}$.



- ارسم القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بالضغط على menu، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ثم 5: قطعة مستقيمة، ثم الضغط على النقطتين B, C.

- ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{BC}$ ويمرُّ في A (بطريقة مماثلة لما ورد في الخطوة 2)، وسمّه $\overleftrightarrow{AD}$، (حيث D نقطة تقاطع المستقيم الموازي لـ $\overline{AB}$ والمستقيم الموازي لـ $\overline{BC}$)، وذلك بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ثم 3: نقطة (نقاط) التقاطع ثم على كلٍّ من المستقيمين الموازيين لـ $\overline{AB}$ وَ $\overline{BC}$؛ لتظهر نقطة تقاطعهما وسمِّها D.

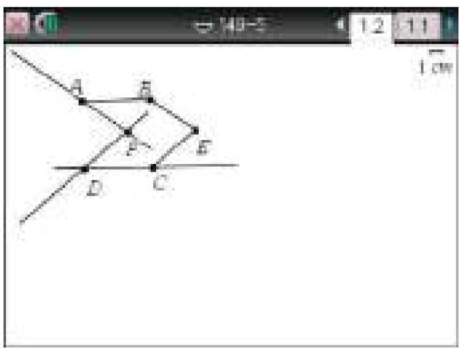
الخطوة 4: قم بإخفاء القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.



- قم بإخفاء القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بالضغط عليها ثم على menu ctrl واختار 4:إخفاء ، وبالمثل قم بإخفاء المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$.
- ارسم نقطةً عن يمين $\overline{BC}$ وسمِّها E
- صِلْ بين B وَ E، وبذلك بالضغط على menu ثم اختار 4:النقاط والمستقيمات ثم 5:قطعة مستقيمة ثم على النقطتين B, E.

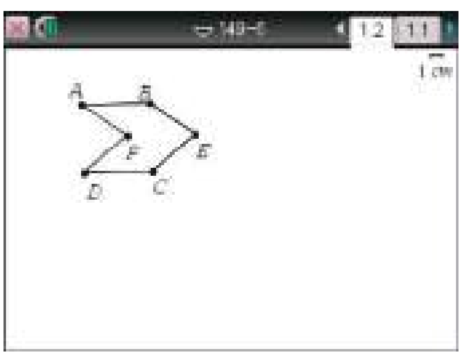
وبالمثل صِلْ بين النقطتين C وَ E.

الخطوة 5: ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$.



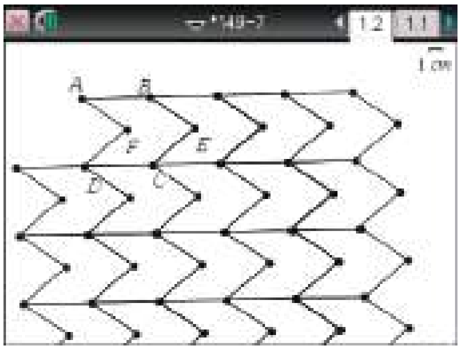
- ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{BE}$ ويمر في A ، ومستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{CE}$ ويمر في D.
- حدِّد نقطة تقاطع المستقيمين الموازيين لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$ وسمِّها F، وذلك بطريقةٍ مماثلةٍ لما ورد في الخطوة 3 .

الخطوة 6: كوّن مضلعًا.



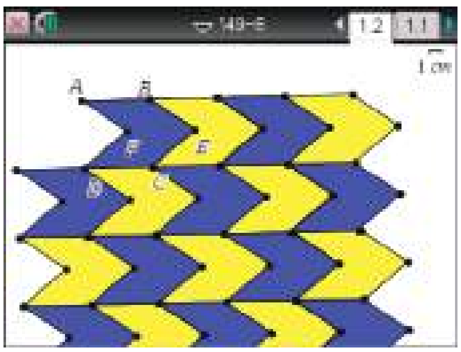
- قم بإخفاء المستقيمات $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{DC}$
- كوّن مضلعًا سداسيًّا بالضغط على menu ثم 5:الأشكال الهندسية ثم 4:المضلع ثم بالضغط على جميع رؤوسه بالتوالي، بدءًا بأحدها وانتهاءً به ثم الضغط على esc .

الخطوة 7: اسحب المضلع.



- اعمل انسحابًا للمضلع، بالضغط على menu ، ثم اختار 8: التحويل الهندسي ومنها 3: الانسحاب ثم الضغط على أحد الرؤوس ثم على المضلع؛ لعمل نسخةٍ منه.
- اسحب النسخة للمكان المناسب، ثم اضغط على مفتاح الإدخال لإفلاتها.
- كرِّر ذلك للحصول على التبليط.

الخطوة 8: لوّن التبليط.



- لوّن التبليط الذي أنشأته، وذلك بتحديد كل مضلع ثم الضغط على ctrl ثم اختار menu 2: لون التعبئة ، واختار لونًا.

تمارين:

حدّد ما إذا كان استعمال أيٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا".

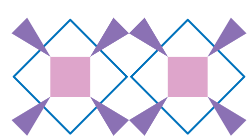
1) مثلث

2) مضلع خماسي

3) مضلع له 16 ضلعًا

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظمٍ أو غير منتظم، وإلى متسق أو غير متسق.

4)



5)

6)

ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي:

7) مضلع ثماني منتظم ومربع

8) مثلث قائم الزاوية

9) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

5-3 التماثل
Symmetry

فيما سبق:

درستُ رسم صورة ناتجة عن الانعكاس والدوران.

(الدرسان 1-3, 3-3)

والآن:

- أحدّد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.
- أحدّد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

المفردات:

التماثل
symmetry

التماثل حول محور
line symmetry

محور التماثل
line of symmetry

التماثل الدوراني
rotational symmetry

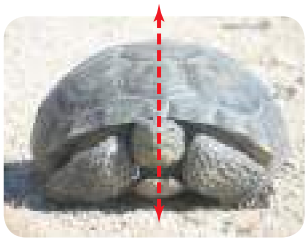
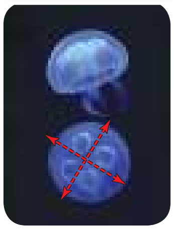
مركز التماثل
center of symmetry

رُتبة التماثل
order of symmetry

مقدار التماثل
magnitude of symmetry

التماثل حول مستوى
plane symmetry

لماذا؟

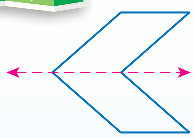
صورة السلحفاة المجاورة توضح تماثلًا لجزأي جسمها الأيمن والأيسر، حيث يُعد التماثل خاصيةً يمكن أن نصف بها العديد من الأشياء، مثل الأشكال الهندسية والمعادلات الرياضية وغيرها. فالمخلوقات التي تبدو صور أجسامها متماثلة حول مستقيم تظهر أنماط عيش أكثر تعقيدًا من المخلوقات ذاتّ الأجسام المتماثلة دورانيًّا مثل قنديل البحر.

التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد: يكون الشكل **متماثلًا**، إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. أحد أنواع التماثل هو التماثل حول محور.

مفهوم أساسي — التماثل حول محور

أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلًا حول محور، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيمٍ ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور تماثل.

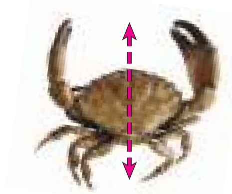


مثال 1 من واقع الحياة — تعيين محاور التماثل

مخلوقات بحرية: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة المخلوق البحري محور تماثلٍ أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

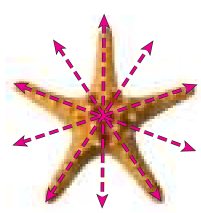
a)

نعم، لصورة هذا المخلوق محور تماثل واحد.



b)

نعم؛ لصورة هذا المخلوق 5 محاور تماثل.



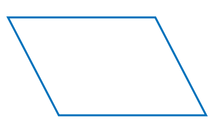
c)

لا؛ لا يوجد لصورة هذا المخلوق محاور تماثل.

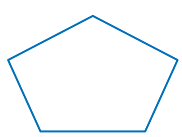
✓ تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

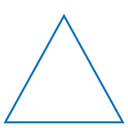
1A)



1B)



1C)



وهناك نوع آخر من التماثل هو التماثل الدوراني .

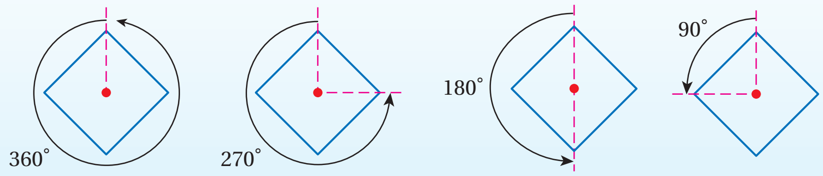
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التماثل الدوراني

يكون للشكل الثنائي الأبعاد **تماثل دوراني** (أو تماثل نصف قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين 0° و 360° حول مركزه هي الشكل نفسه، ويسمّى مركز الدوران في هذه الحالة **مركز التماثل** (أو نقطة التماثل).

أمثلة : المربع الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكلٍّ من الزوايا 0°، 90°، 180°، 270°، 360° ينتج عنه الشكل نفسه.



يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من 0° إلى 360° اسم **رتبة التماثل**، أما **مقدار التماثل** (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، ويرتبط مقدار التماثل ورُتبته بالعلاقة:

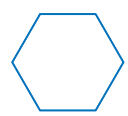
مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة 360° على رُتبة التماثل.

ففي الشكل أعلاه، رُتبة التماثل الدوراني 4، ومقدار التماثل 90°

مثال 2 تعيين التماثل الدوراني

بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



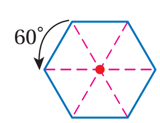
نعم؛ للسداسي المنتظم تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع أقطاره.

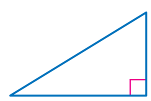
رتبة التماثل $= 6$

مقدار التماثل $=$

$360^\circ \div 6 = 60^\circ$



b)



لا؛ لا يوجد دوران بزاوية بين 0° و 360° تنطبق فيه صورة المثلث القائم الزاوية على نفسه.

c)

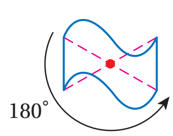
نعم؛ لهذا الشكل تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع قطريه.

رتبة التماثل $=2$

مقدار التماثل $=$

$360^\circ \div 2 = 180^\circ$



✓ تحقق من فهمك

أزهار: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة الزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

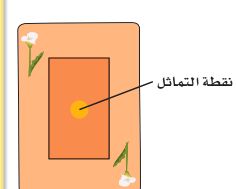
2A)

2B)

إرشادات للدراسة

التماثل حول نقطة : يكون الشكل متماثلًا حول نقطةٍ، إذا كانت صورته الناتجة عن الدوران حول تلك النقطة بزاوية 180° هي الشكل نفسه.

يحقق الشكل أدناه خاصية التماثل حول نقطة.



التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد: يمكن أن تكون الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا متماثلة .

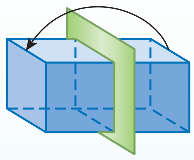
مفاهيم أساسية

أضف إلى مطويتك

التماثلات في الأشكال الثلاثية الأبعاد

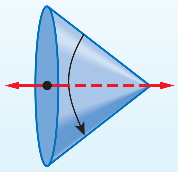
التماثل حول مستوى

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول مستوى**، إذا أمكن تقسيمه بهذا المستوى إلى شكلين متطابقين، وفي هذه الحالة يسمى هذا المستوى (مستوى التماثل).



التماثل حول محور

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول محور**، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين $0°$ و $360°$ ؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.



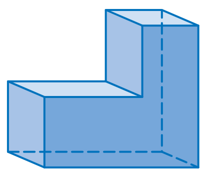
إرشادات للدراسة

مستوى التماثل: هو المستوى الذي يقسم الشكل إلى نصفين متطابقين تمامًا، بحيث يكون كلٌّ منهما صورة للآخر .

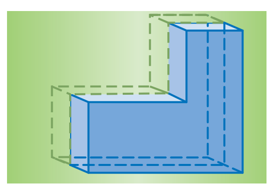
مثال 3 التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

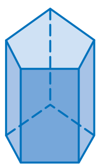
a) مجسَّم على شكل حرف L



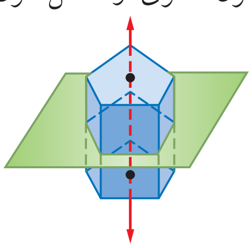
متماثل حول مستوى



b) منشور خماسي منتظم



متماثل حول مستوى، ومتماثل حول محور

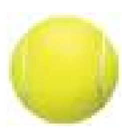


مراجعة المفردات

المنشور: مجسم متعدد السطوح له قاعدتان متطابقتان وأوجهه على شكل متوازي أضلاع.

✓ تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

3A) 

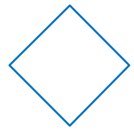
3B) 

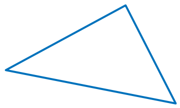
3C) 

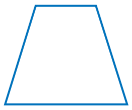
3D) 

تأكد

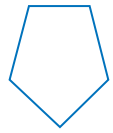
المثال 1 بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

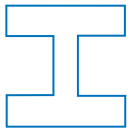
(1


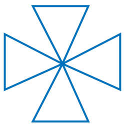
(2


(3


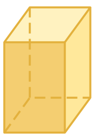
المثال 2 بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(4


(5


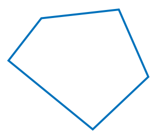
(6


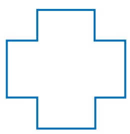
المثال 3 (7 بيّن ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

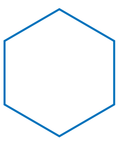


تدرب وحل المسائل

المثال 1 بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

(8


(9


(10


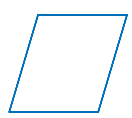
أعلام: بيّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

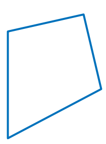
(11

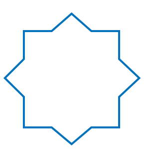

(12


(13


المثال 2 بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(14


(15


(16


إطارات: بيّن ما إذا كان لصورة غطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره .

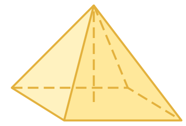
(17


(18

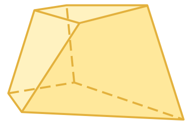

(19


المثال 3 بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

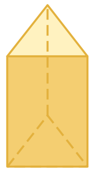
(20



(21

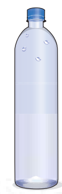


(22

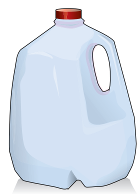


عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية، ومستويات التماثل الرأسية لكلٍّ من العلب الآتية:

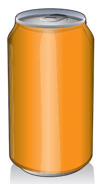
(23



(24



(25



هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

(26 $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$

(27 $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$

(28 $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$

جبر: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره، واكتب معادلة كل محور تماثل.

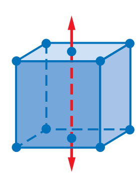
(29 $y = x$

(30 $y = x^2 + 1$

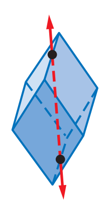
(31 $y = -x^3$

حدّد ما إذا كانت البلورة متماثلةً حول مستوى أو متماثلة حول محور في كلٍّ ممَّا يأتي:

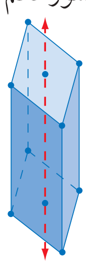
(32 مكعب



(33 مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين



(34 منشور قائم قاعدته معين



الربط مع الحياة

تعتمد الخصائص الفيزيائية للمادة الصلبة على ترتيب بلوراتها، فبلّورات الألماس تأخذ شكل المكعب، وروابطها قوية جدًا يصعب قطعها، وهذا ما يجعل الألماس مادةً قاسيةً جدًا.

(35 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة.

a) **هندسيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله.

b) **هندسيًّا:** كرّر العملية في الفرع **a** على مربع ومضلعٍ خماسيٍّ منتظمٍ ومضلعٍ سداسيٍّ منتظم.

c) **جدوليًّا:** نظّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكلٍّ من هذه المضلعات.

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط،
في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط.
فهل أيٌّ منهما على صواب؟ برر إجابتك.

الشكل A

37) **تحدٍّ:** يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما: $y = -x + 2$, $y = x - 1$. مثل محوري التماثل بيانيًا ثم أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل ومثله بيانيًا.

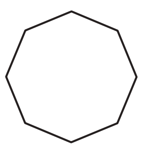
38) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك.

39) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟

41) ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟



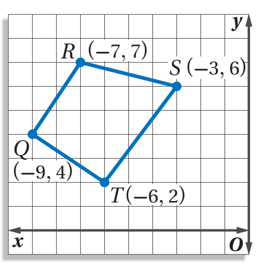
مراجعة تراكمية

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(1, 5), K(3, 1), L(5, 7)$، مثِّل بيانيًا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x .

43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y .

44) يبيِّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي، ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-3)

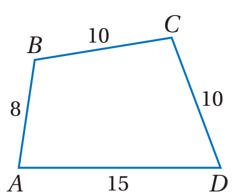


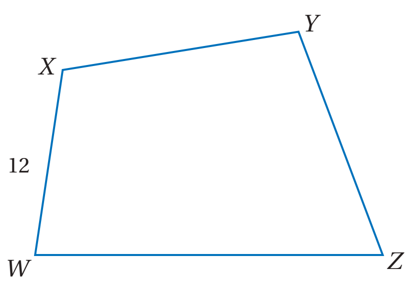
استعد للدرس اللاحق

إذا كان $ABCD \sim WXYZ$ ، فأوجد كلًّا مما يلي:

45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$

46) XY 47) YZ 48) WZ





رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-6 التمدد
Dilations

فيما سبق:
درستُ رسم صورة ناتجة عن تكبير شكل أو تصغيره.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

المفردات:
التمدد
dilation

تحويل التشابه
similarity transformation

معامل مقياس التمدد
scale factor of dilation

لماذا؟
بينما يستعمل كثيرون آلات التصوير الرقمية، إلا أنه لا زال بعض المصوِّرين يفضلون استعمال الفيلم وآلات التصوير التقليدية لإنتاج مسودات الصور، ومن هذه المسودات يكوّن المصوِّرون صورًا بقياساتٍ مختلفةٍ.

رسم التمدد: **التمدد** هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. وتسمى هذه النسبة **معامل مقياس التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله.

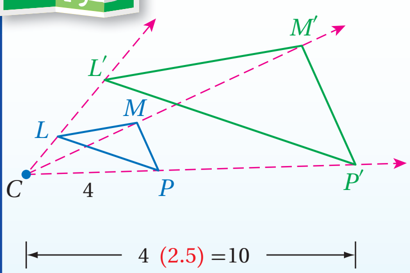
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التمدد

التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k ، حيث $k \neq 1$ ، ينقل النقطة P في شكلٍ ما إلى صورتها P' ، بحيث:

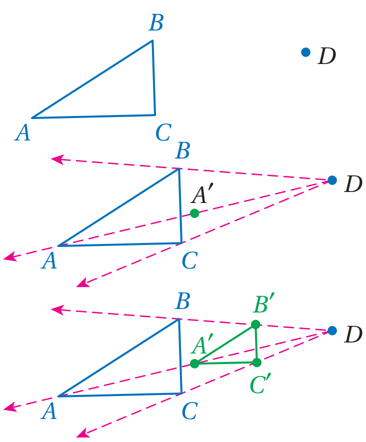
- **إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها هي النقطة P نفسها.**
- **إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ ، ويكون $CP' = k(CP)$.**



$\triangle L'M'P'$ هو صورة $\triangle LMP$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5

مثال 1 رسم التمدد

استعمل مسطرةً لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة D ، ومعامله $\frac{1}{2}$



الخطوة 1: ارسم من D أنصاف المستقيمات $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

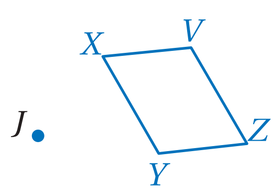
الخطوة 2: عيّن A' على $\overrightarrow{DA}$ ، بحيث يكون $DA' = \frac{1}{2} DA$.

الخطوة 3: عيّن B' على $\overrightarrow{DB}$ و C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة نفسها ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.

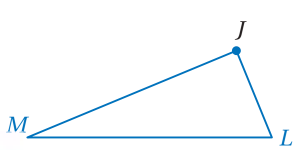
تحقق من فهمك

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J ، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

(1A $k = \frac{3}{2}$



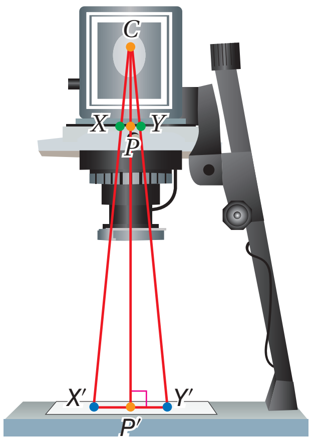
(1B $k = 0.75$



من تعريف معامل مقياس التمدد، تجد أنه إذا كان معامل مقياس التمدد k أكبر من 1 ، فإن أبعاد الصورة أكبر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي وعندها يكون التمدد تكبيرًا. وإذا كان $0<k<1$، فإن أبعاد الصورة تكون أصغر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي، وعندها يكون التمدد تصغيرًا. وبما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن التمدد في المثال 1 تصغير.

ويسمّى التمدد الذي معامله 1 تمددًا مطابقًا؛ إذ يكون الشكل الأصلي وصورته متطابقين.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد معامل مقياس التمدد



تصوير: لإنتاج صور مكبرة، يمكن أن تُعَدَّل المسافة بين مسودة الصورة والصورة المكبرة باستعمال جهاز تكبير الصور.

افترض أن المسافة CP بين مصدر الضوء C ومسودة الصورة تساوي **45 mm**، ما المسافة PP' التي يلزم أن يُعدَّل إليها جهاز تكبير الصور للحصول على صورة عرضها $X'Y' = 22.75\text{cm}$ من مسودة عرضها $XY = 35 \text{ mm}$؟

افهم: **المعطيات:** مركز التمدد C ، $XY = 35$ mm ،
$X'Y' = 22.75$ cm $= 227.5$ mm ،
$CP = 45$ mm.

المطلوب: إيجاد PP'.

خطط: أوجد معامل مقياس التمدد من الشكل الأصلي $\overline{XY}$ إلى الصورة $\overline{X'Y'}$، واستعمله لإيجاد CP' ، ثم استعمل CP و CP' لإيجاد PP'.

حُلّ: معامل مقياس التمدد هو نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي .

$$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$$ معامل مقياس تمدد الصورة

$$= \frac{X'Y'}{XY}$$ طول الصورة يساوي $X'Y'$ ، وطول الأصل يساوي XY

$$= \frac{227.5}{35} = 6.5$$ بالتعويض والقسمة

استعمل معامل مقياس التمدد لإيجاد CP'.

$$CP' = k(CP)$$ تعريف التمدد

$$= 6.5(45)$$ $k = 6.5 , CP = 45$

$$= 292.5$$ بالضرب

استعمل CP' و CP لإيجاد PP'.

$$CP + PP' = CP'$$ مسلّمة جمع القطع المستقيمة

$$45 + PP' = 292.5$$ $CP = 45 , CP' = 292.5$

$$PP' = 247.5$$ بطرح 45 من الطرفين

يجب أن يُعدل جهاز تكبير الصور، بحيث تكون المسافة PP' بين المسودة والصورة المكبرة 247.5 mm أو 24.75 cm

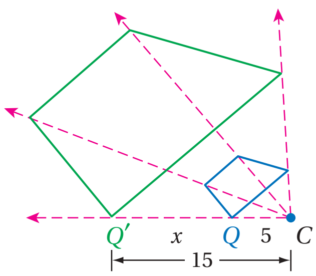
تحقق: بما أن هذا التمدد تكبير، إذن يجب أن يكون معامله أكبر من 1، وبما أن $6.5 > 1$ ، فإن معامل مقياس التمدد معقول . ✓

إرشادات لحل المسألة

استعمال التقدير: لتجنُّب الأخطاء غير المقصودة في حساباتك، قدّر إجابة السؤال قبل الشروع في الحل. يمكنك أن تقدّر معامل مقياس التمدد في المثال 2 بحوالي $\frac{240}{40}$ أو 6 وبذلك يكون CP' 6 (50) أي 300 تقريبًا. ويكون PP' 50 − 300 أي 250 mm تقريبًا، أو 25 cm، والإجابة 24.7 cm قريبة من الإجابة المقدّرة؛ لذا فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد، وقيمة x.



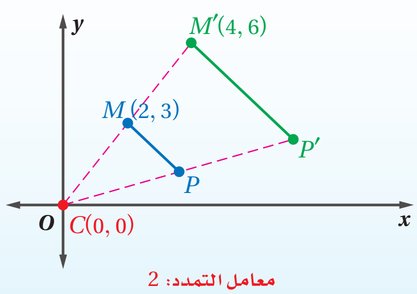
التمدد في المستوى الإحداثي: يمكن أن تستعمل القاعدة الآتية لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — التمدد في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيَّين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k.

مثال:



الرموز: $(x, y) \to (kx, ky)$

إرشادات للدراسة

معامل التمدد السالب: يمكن أن يكون معامل التمدد سالبًا، وستستقصي هذا النوع من التمدد في السؤال 26.

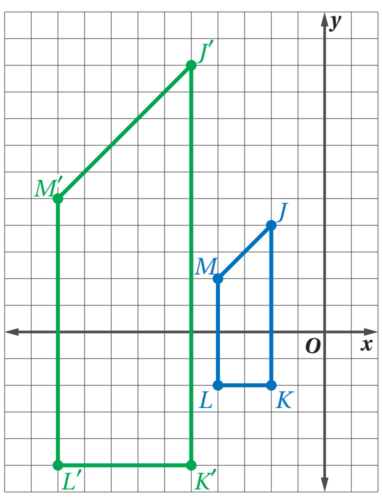
مثال 3 — التمدد في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي: $J(-2, 4), K(-2, -2), L(-4, -2), M(-4, 2)$. مثّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 2.5

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5

(x, y)	$\to$	$(2.5x, 2.5y)$
$J(-2, 4)$	$\to$	$J'(-5, 10)$
$K(-2, -2)$	$\to$	$K'(-5, -5)$
$L(-4, -2)$	$\to$	$L'(-10, -5)$
$M(-4, 2)$	$\to$	$M'(-10, 5)$

مثِّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته $J'K'L'M'$.



تحقق من فهمك

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

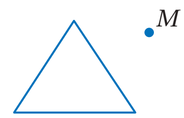
3A) $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3)$ ؛ $k = \frac{1}{3}$

3B) $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1)$ ؛ $k = 2$

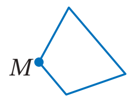
تأكـد

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمددٍ مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1 $k = \frac{1}{4}$

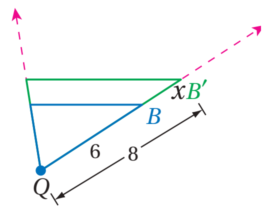


(2 $k = 2$

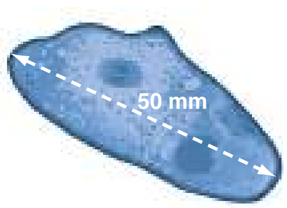


المثال 2

(3 حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.



(4 **أحياء:** طول مخلوق حيٍّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المُستعملة؟ وضّح إجابتك.



المثال 3 مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

(5 $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$ ؛ $k = 1.5$

(6 $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$

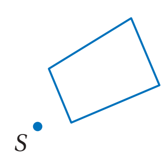
(7 $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$ ؛ $k = 2$

(8 $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$ ؛ $k = \frac{3}{4}$

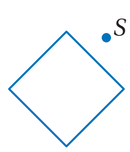
تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمددٍ مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

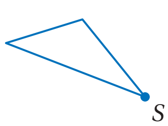
(9 $k = \frac{5}{2}$



(10 $k = \frac{1}{3}$

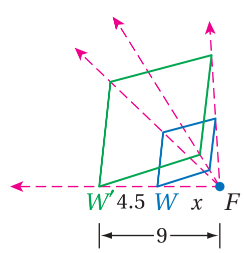


(11 $k = 2.25$

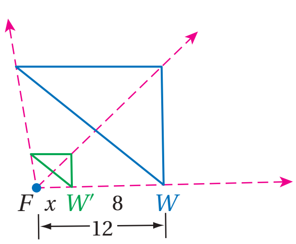


المثال 2 حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x .

(12

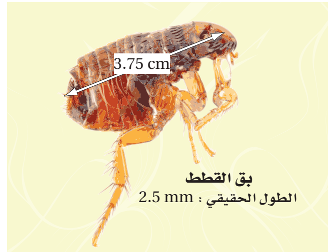


(13



حشرات: طول كلٍّ من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المُستعملة، ووضّح إجابتك.

14)



15)

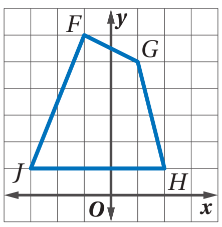
المثال 3 مثِّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

16) $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$ ؛ $k = 0.5$

17) $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$ ؛ $k = 0.75$

18) $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$ ؛ $k = 3$

19) **هندسة إحداثية:** استعمل التمثيل البياني للمضلع $FGHJ$ للإجابة عمَّا يلي:



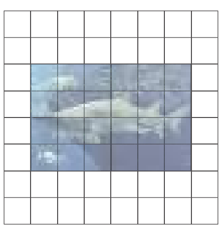
a) مثِّل بيانيًّا صورة $FGHJ$ الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y.

b) نفِّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.

c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا في الصورة النهائية؟

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد والانعكاس في الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟

20) **رسم:** يرسم سليمان صورةً باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية شفافة طول وحدتها $\frac{1}{4}$ cm فوق صورة أبعادها $4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$، ويضع شبكةً أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ cm على ورقة رسم أبعادها $8\text{ cm} \times 12\text{ cm}$، ثم يرسم ما يحويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.

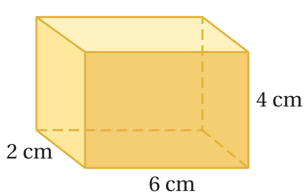


a) ما معامل مقياس هذا التمدد؟

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعيَّن عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج عن صورة أبعادها 5 cm x 7 cm عند استعمال شبكة وحدتها 2 cm على لوحة الرسم؟

21) **تغيير الأبعاد:** يمكن إجراء تمددٍ على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.



a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.

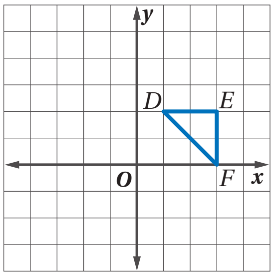
b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله 2، وأوجد حجمه.

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله $\frac{1}{2}$، وأوجد حجمه.

d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي، ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمددٍ إلى حجم المنشور الأصلي.

e) ضع تخمينًا حول أثر التمددٍ ذي المعامل الموجب في مساحة سطح المنشور وفي حجمه.

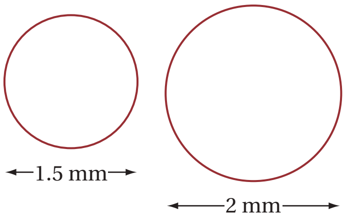
22) **هندسة إحداثية :** استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي:



a) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3

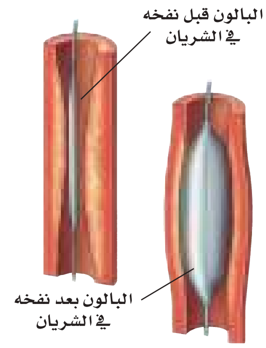
b) عبِّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين، أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3

23) **صحة :** استعمل فقرة الربط مع الحياة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.
أوجد معامل هذا التمدد.

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده .

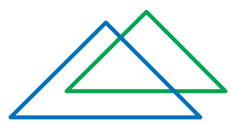


الربط مع الحياة

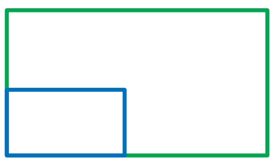
عندما يضيق الشريان التاجي الذي ينقل الدم إلى القلب بسبب تراكم الكولسترول، يمكن توسيعه باستعمال أنبوب أجوف مرن في نهايته بالون صغير، وتسمَّى هذه العملية قسطرة البالون.

أُعطي في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P، عيّن موقع النقطة P، وأجد معامل مقياس التمدد .

24)



25)



26) **تمثيلات متعددة :** في هذه المسألة ستستقصي التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

a) **هندسيًّا :** مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0), B(2, -4), C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقط الأصل ومعامله -2

b) **هندسيًّا :** ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ ، وآخر معامله -3

c) **جدوليًّا :** اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

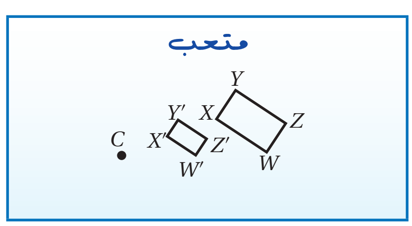
d) **لفظيًّا :** ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

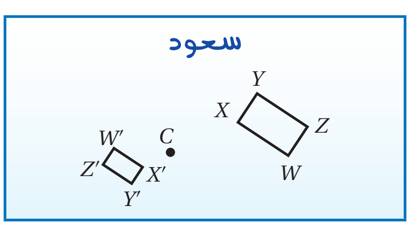
e) **تحليليًّا :** اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$.

f) **لفظيًّا :** عبِّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ :** يحاول كلٌّ من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل مقياس التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$، فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.





28) **تحدٍّ :** أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

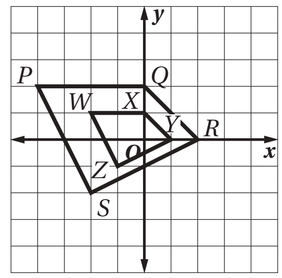
29) **اكتب :** هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة ؟ اشرح إجابتك .

30) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا في المستوى الإحداثي، ثم كبِّره بحيث تصبح مساحة صورته الناتجة عن التمدد أربعة أمثال مساحته الأصلية، وحدّد معامل مقياس التمدد ومركزه.

31) **اكتب:** حدّد التحويلات الهندسية التي تكون نتيجتها مطابقة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها مشابهة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها الشكل الأصلي نفسه. اشرح إجابتك.

تدريب على اختبار

32) ما معامل مقياس التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟



33) يرسم توفيق نسخةً من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، وطولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل مقياس تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمه؟

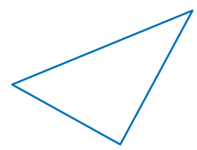
A $4 \text{ in} \times 8 \text{ in}$ **C** $6 \text{ in} \times 12 \text{ in}$

B $8 \text{ in} \times 16 \text{ in}$ **D** $10 \text{ in} \times 20 \text{ in}$

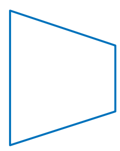
مراجعة تراكمية

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 5-3)

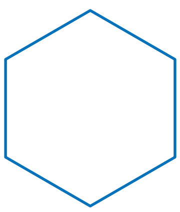
34)



35)

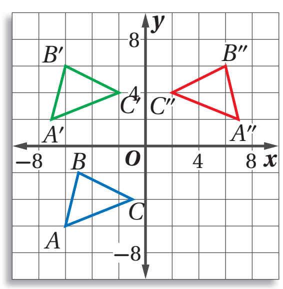


36)

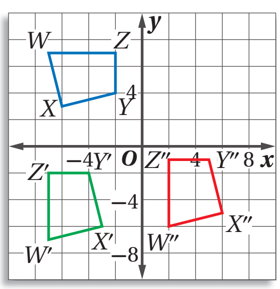


صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

37)



38)



استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

39) $58.9 = 2x$

40) $\frac{108.6}{\pi} = x$

41) $228.4 = \pi x$

42) $\frac{336.4}{x} = \pi$

الفصل 3

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 1-3)

- الانعكاس هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيمٍ يُسمّى محور الانعكاس.

الإزاحة (الانسحاب) (الدرس 2-3)

- الإزاحة (الانسحاب) هي تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه .

الدوران (الدرس 3-3)

- يحرِّك الدوران كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات الهندسية (الدرس 4-3)

- يمكن تمثيل الإزاحة بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متوازيين، ويمكن تمثيل الدوران بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين .

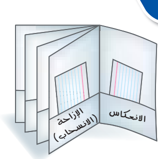
التماثل (الدرس 5-3)

- التماثل: يكون الشكل مماثلًا إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.
- رُتبة التماثل هي عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$
- مقدار التماثل هو قياس أصغر زاوية يدور بها الشكل حتى ينطبق على نفسه.

التمدد (الدرس 6-3)

- يكبّر التمدد الشكل أو يصغّره بنسبة محدّدة.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

مفردات أساسية

محور الانعكاس (ص. 118)
مركز الدوران (ص. 133)
زاوية الدوران (ص. 133)
التحويل الهندسي المركب (ص. 141)
التماثل (ص. 154)
التماثل حول محور (الأشكال الثنائية الأبعاد) (ص. 154)
محور التماثل (ص. 154)
التماثل الدوراني (ص. 155)
مركز التماثل (ص. 155)
رتبة التماثل (ص. 155)
مقدار التماثل (ص. 155)
التماثل حول مستوى (ص. 156)
التماثل حول محور (الأشكال الثلاثية الأبعاد) (ص. 156)
التمدد (ص. 160)
تحويل التشابه (ص. 160)
معامل مقياس التمدد (ص. 160)

اختبار المفردات

اختر المفردة التي تجعل الجملة صحيحة:

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكلٍ ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن هذه العملية تسمى (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، رتبة الدوران).
2) إذا طُوي شكل حول خطٍّ مستقيم، وانطبق نصفاه أحدهما على الآخر تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محور الانعكاس ، محور التماثل).
3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).
4) يُطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$ اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).
5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل وصورتها.
6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.
7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.
8) لتدوير نقطةٍ ما بزاوية ($90°$ ، $180°$) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، وبدّل الإحداثيين x , y.
9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.
10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

3-1 الانعكاس (ص 118–125)

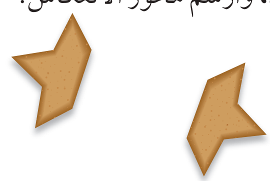
مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي وصورته بالانعكاس المحدد.

11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$؛ الانعكاس حول المحور x.

12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$؛ الانعكاس حول المحور y.

13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$؛ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

14) **فن:** يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبَي ممرٍّ في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انسخ الشكل في دفترك، وارسم محور الانعكاس.



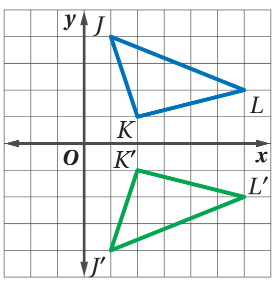
مثال 1

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(1, 4), K(2, 1), L(6, 2)$، ومثِّل صورته بالانعكاس حول المحور x.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$
$$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$$
$$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$$
$$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$$

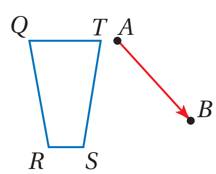
ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J'K'L'$.



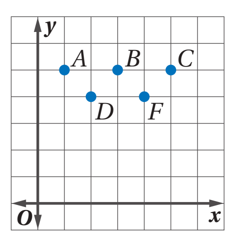
3-2 الإزاحة (الانسحاب) (ص 126–131)

15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B.



17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعب، تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى أسفل، في حين تحرك اللاعب A خمس وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين.



مثال 2

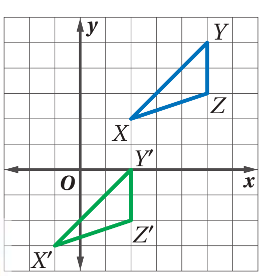
مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(2, 2), Y(5, 5), Z(5, 3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى أسفل.

يمكن تمثيل هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$.

أوجد صورة كل رأس.

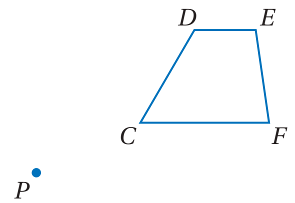
$$(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$$
$$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$$
$$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$$
$$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$$

ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ وصورته $\triangle X'Y'Z'$.



3-3 الدوران (ص 133–138)

18) استعمل منقلةً ومسطرةً لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P.



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل في كلٍّ ممَّا يأتي:

19) $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$

20) $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$

مثال 3

مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل، حيث: $A(-4, 0), B(-3, 4), C(-1, 1)$.

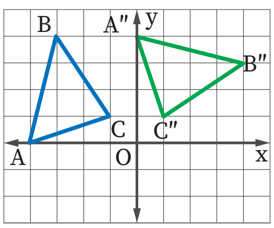
إحدى طرائق حل هذه المسألة هي إجراء دوران بزاوية $180°$، ثم دوران آخر بزاوية $90°$؛ لذا اضرب الإحداثيَّين x, y في -1

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$$
$$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$$
$$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$$

ثم اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1، وبدّل موقعَي الإحداثيين x, y .

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$$
$$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$$
$$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$$

ثم مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.



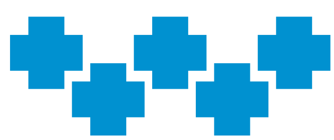
3-4 تركيب التحويلات الهندسية (ص 141–148)

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدد في كلٍّ ممَّا يأتي:

21) $\overline{CD}$ ، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$ ، انعكاس حول المستقيم $y = x$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.

22) $\overline{GH}$ ، حيث $G(-2, -3), H(1, 1)$ ، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .

23) **أنماط:** كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة، صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.



مثال 4

إحداثيات طرفَي $\overline{RS}$ هما $R(4, 3)$, $S(1, 1)$،
مثِّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

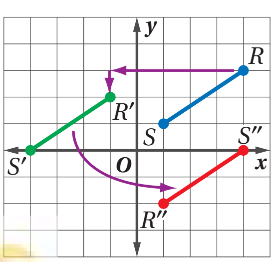
الخطوة 1: يمكن التعبير عن الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$

$$(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$$
$$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$$
$$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$$
$$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.

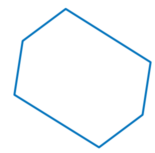


دليل الدراسة والمراجعة

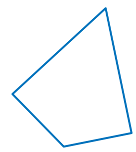
3-5 التماثل (ص 154–159)

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها.

24)

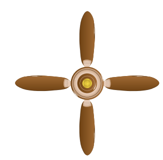


25)



بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

26)

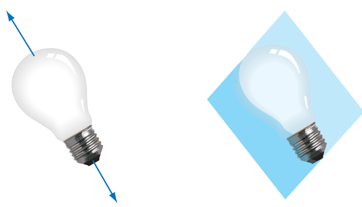


27)

مثال 5

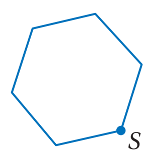
بيِّن ما إذا كان الشكل الآتي متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك .

المصباح متماثل حول مستوى، وكذلك حول محور.

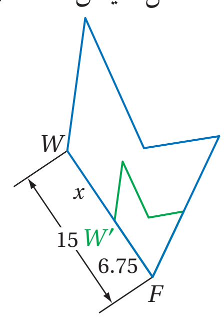


3-6 التمدد (ص 160–166)

28) استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.



29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد وقيمة x.



30) **نوادٍ علمية :** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار، إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in ، وعرض صورتها على الجدار 4 ft ، فما معامل التكبير؟

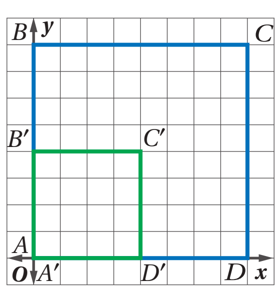
مثال 6

مثل بيانيًّا الشكل $ABCD$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 0.5 ، إذا كانت: $A(0, 0), B(0, 8), C(8, 8), D(8, 0)$.

اضرب الإحداثيين x, y لكل رأس في معامل مقياس التمدد 0.5

$$(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$$
$$A(0, 0) \rightarrow A'(0, 0)$$
$$B(0, 8) \rightarrow B'(0, 4)$$
$$C(8, 8) \rightarrow C'(4, 4)$$
$$D(8, 0) \rightarrow D'(4, 0)$$

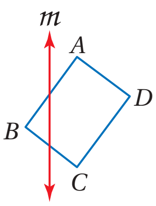
مثِّل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ بيانيًّا.



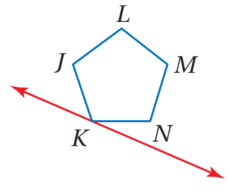
اختبار الفصل

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى:

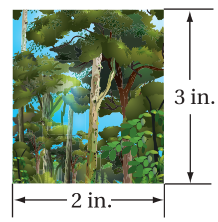
1)



2)

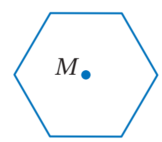


3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة؛ لتصبح أبعادها 4 in في 6 in ، مستعملًا آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in ، ولا تزيد عن ذلك.

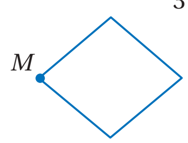


استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4) $k = 1.5$



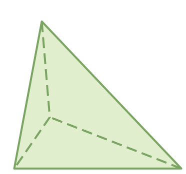
5) $k = \frac{1}{3}$



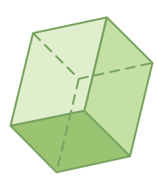
6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها $60°$ كل ثانيتين، فبعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟

بيِّن ما إذا كان كلٌّ من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7)



8)



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

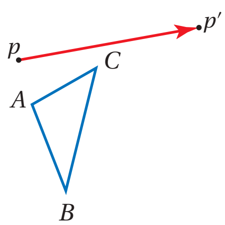
9) $\square FGHJ$ ، حيث: $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$ ؛ انعكاس حول المحور x .

10) $\triangle ABC$ ، حيث: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$ ؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أعلى.

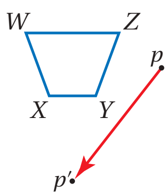
11) الشكل الرباعي $WXYZ$ ، حيث: $W(2,3), X(1,1), Y(3,0), Z(5,2)$ ؛ دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

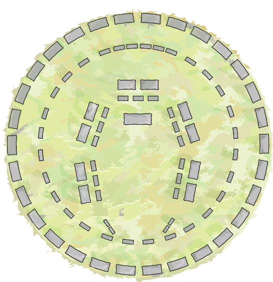
12)



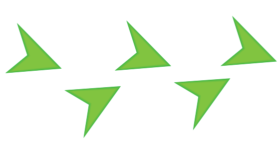
13)



14) **آثار:** يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري، فما رتبة تماثل الحلقة الخارجية؟ وما مقداره؟



15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثِّله الشكل الآتي؟



A تمدد

B إزاحة ثم انعكاس

C دوران

D إزاحة

الفصل 3

الإعداد للاختبارات

الحل عكسيًّا

في معظم المسائل تُعطى مجموعة من الشروط أو الحقائق، ويُطلب إليك إيجاد النتيجة النهائية. ومع ذلك قد تُعطى في بعض المسائل النتيجة النهائية، ويطلب إليك إيجاد أمر ما وقع مبكرًا في موقف المسألة. ولحل مثل هذه المسائل، يتعين عليك أن تستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجيات الحل عكسيًّا

الخطوة 1

ابحث عن كلمات مفتاحية تشير إلى أنه يلزم أن تحل المسألة عكسيًّا.

بعض الكلمات المفتاحية الممكنة:

- ماذا كان المقدار **الأصلي** ...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل** ...؟
- ماذا كان المقدار **في البداية** ...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة.

- اكتب قائمة بالخطوات المتتابعة من البداية، وصولًا إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ من النتيجة النهائية، وتتبع الخطوات بترتيبٍ عكسيٍّ.
- "تراجع" عن كل خطوة باستعمال العمليات العكسية حتى تصل إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من الحل إذا سمح الوقت .

- تأكد من أن إجابتك منطقية.
- ابدأ من إجابتك واتبع الخطوات بالترتيب المُعطى في المسألة؛ لتتأكد من الوصول إلى النتيجة النهائية نفسها.

مثال

حُلَّ المسألة الآتية، وبيِّن خطوات الحل، وستصحح الإجابة، وتحدد الدرجة المُستحقّة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابات القصيرة المجاور.

تستعمل سعاد برمجيةً حاسوبيةً؛ لتتدرب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي. بدأت من نقطة وأزاحتها 4 وحدات إلى أعلى و 8 وحدات إلى اليسار. ثم أجرت انعكاسًا للصورة الناتجة حول المحور x . وأخيرًا أجرت تمددًا للصورة الناتجة معامله 0.5 ، ومركزه نقطة الأصل، فكانت إحداثيات الصورة النهائية $(-4, -1)$. ماذا كانت الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة؟

سلم تقدير	
المعيار	**الدرجة**
صحيح كاملًا: الإجابة صحيحة، ومعها تفسير تام يوضح كل خطوةٍ من خطوات الحل .	2
صحيح جزئيًّا: • الإجابة صحيحة، ولكن التفسير غير تام . • الإجابة غير صحيحة، ولكن التفسير صحيح.	1
غير صحيح مطلقًا: لا توجد إجابة، أو أنها غير منطقية.	0

اقرأ المسألة بعناية. لقد أعطيت مجموعة تحويلات هندسية متعاقبة لنقطةٍ في المستوى الإحداثي، وتعلم إحداثيات الصورة النهائية لهذه النقطة، وطُلب إليك أن تجد الإحداثيات الأصلية. حُلّ المسألة بالعمل عكسيًّا؛ تراجع عن كل تحويل هندسي بترتيب عكسي؛ كي تجد الإحداثيات الأصلية.

مثال للإجابة التي تستحق درجتين:

النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تمدد ← النتيجة النهائية.
ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحُلّ عكسيًّا.
للتراجع عن التمدد الذي معامله 0.5 ، نفّذ تمددًا معامله 2 : $(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$
للتراجع عن الانعكاس الأول، أوجد صورة النقطة بالانعكاس حول المحور x : $(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$
وللتراجع عن الإزاحة الأولى، نفّذ إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى أسفل و8 وحدات إلى اليمين: $(-2, 8) \rightarrow (-2+8, 8-4) = (6, 4)$
إذن الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة هي $(6, 4)$.

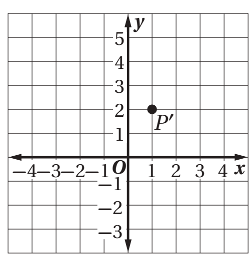
لقد كانت الخطوات والحسابات والتبريرات كلها واضحة في هذه الإجابة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، ولذلك تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، وستصحح الإجابات وتحدد الدرجة المُستحقة باستعمال سُلّم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين، ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(4, -1)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟

2) في الشبكة الإحداثية الآتية تظهر الصورة النهائية لنقطةٍ تم تدويرها بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2 ، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟

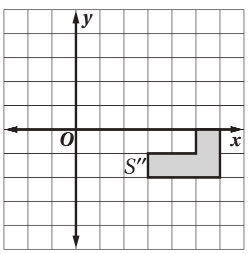


3) إذا كانت $A''(2, -2), B''(-5, -4)$ إحداثيات طرفي $\overline{A''B''}$ تمثل الصورة النهائية لـ $\overline{AB}$، بعد إجراء انعكاسٍ لها حول المحور x، ثم إزاحة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x-1, y+2)$ فأيٌّ ممّا يأتي يمثل إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

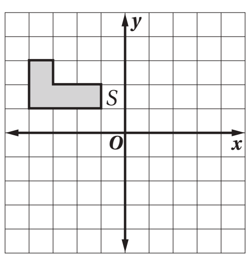
A $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$ **C** $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ **D** $(-1, 0)$

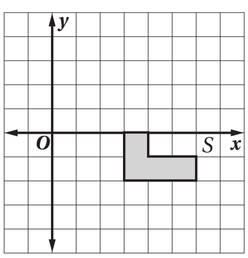
4) الشكل S'' يمثل الصورة النهائية الناتجة للشكل S، بعد إجراء التحويلات الهندسية التالية عليه: انعكاس حول المحور y، ثم انسحاب 3 وحدات إلى أسفل ووحدتين إلى اليمين.



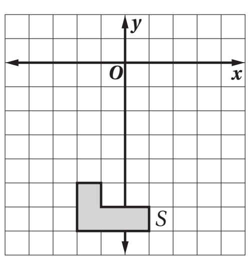
A



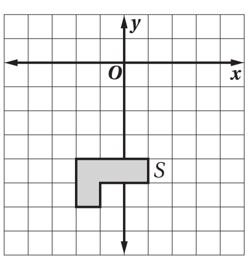
C



B



D



أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

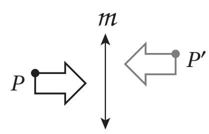
1) إحداثيات النقطة N هي $(4, -3)$، ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y؟

A $N'(-3, 4)$ **C** $N'(4, 3)$

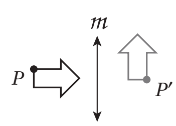
B $N'(-4, 3)$ **D** $N'(-4, -3)$

2) أيُّ الأشكال الآتية يبيّن نتيجة انعكاس الشكل p حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟

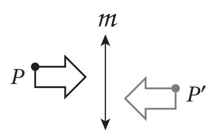
A



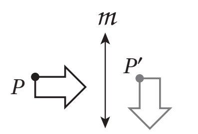
C



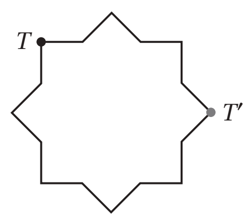
B



D



3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي بها حول مركز تماثله حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T'؟



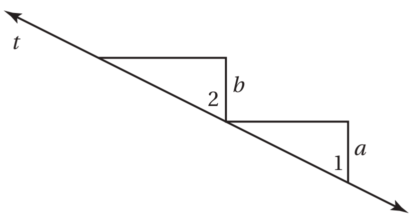
A $90°$ **C** $135°$

B $120°$ **D** $225°$

إرشادات للاختبار

السؤال 3: كم رأسًا لهذه النجمة؟ اقسم $360°$ على عدد الرؤوس؛ لإيجاد زاوية الدوران من نقطةٍ إلى النقطة التالية.

4) **المعطيات:** $a \parallel b$



أيُّ العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟

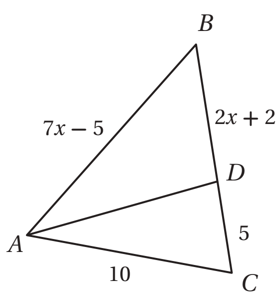
A إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان.

B إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

C إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزوايتين المتناظرتين متطابقتان.

D إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان.

5) في $\triangle ABC$، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$.
ماقيمة x؟



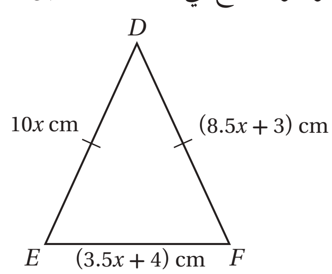
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أيٌّ ممَّا يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟



A 2 cm **C** 9 cm

B 8 cm **D** 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟

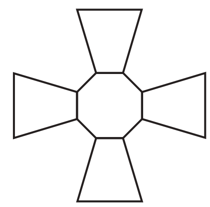
A شكل الطائرة الورقية **C** المعين

B متوازي الأضلاع **D** شبه المنحرف

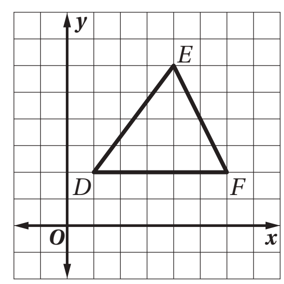
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



9) مثِّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

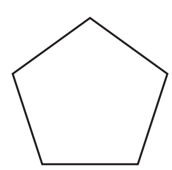


10) أكمل العبارة الآتية:

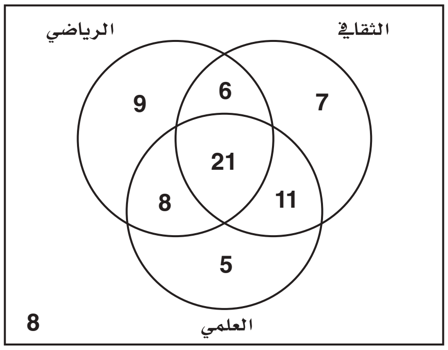
"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية، فإنها ....

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟



13) سُئل 57 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومُثِّلت النتائج بشكل ڤن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين (الثقافي والعلمي)، ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2), R(-2, 4), S(-3, -3), T(3, -4)$، ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.

d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.

e) فسِّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة من دون استعمال المستوى الإحداثي.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	3-1	3-4	3-3	مهارة سابقة	2-4	مهارة سابقة	1-6	3-5	3-6	مهارة سابقة	3-2	1-1	مهارة سابقة	3-3

الفصل

4

الدائرة
Circle

فيما سبق:

درستُ أنواعًا من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

والآن:

- أتعرّف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أعرّف القاطع والمماس وأستعملهما.
- أعرّف الدائرة أو أصفها؛ مستعملاً معادلتها.

لماذا؟

علوم: الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمّى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوسًا.

المطويات منظم أفكار

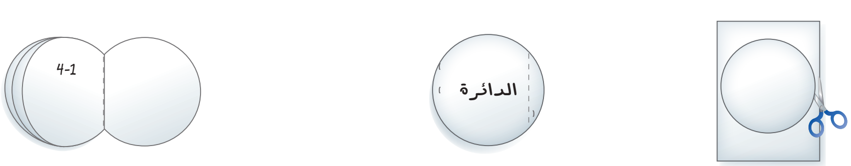
الدائرة: اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئًا بتسع أوراق A4 .

1 ارسم دائرة قطرها 18 cm في كل ورقة باستعمال الفرجار.

2 قُصّ هذه الدوائر.

3 ثبّت الأوراق من الجهة اليمنى كما في الشكل، واكتب عنوان الفصل على الورقة الأولى.

4 اكتب أرقام الدروس في أعلى الصفحة في بقية الأوراق.



التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد النسبة المئوية من العدد المعطى في كلّ ممّا يأتي:

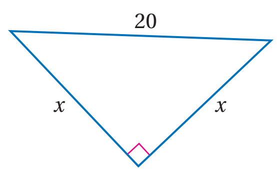
1) 26% من 500 **2)** 79% من 623

3) 19% من 82 **4)** 10% من 180

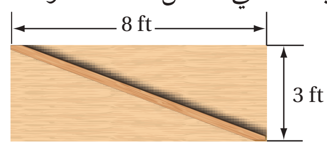
5) 92% من 90 **6)** 65% من 360

7) مطاعم: يُضيف مطعمٌ رسم توصيل قدره 5% على كل طلبٍ. ما رسم خدمة توصيل وجبة غداء سعرها 65 ريالًا؟

8) أوجد قيمة x، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.



9) نجارة: أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل أدناه. ما طول هذه الدعامة؟



حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$

11) $x^2 = x + 12$

12) ألعاب نارية: أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني، ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، فارتدت إلى الأرض، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية وصلت سطح الأرض؟

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة 15% من 35

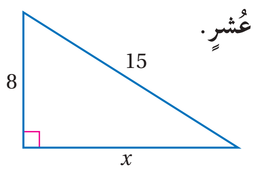
15% من $35 = (0.15)(35)$ تحويل النسبة المئوية إلى كسر عشري

$= 5.25$ بالضرب

إذن 15% من 35 تساوي 5.25

مثال 2

أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 8^2 = 15^2$ بالتعويض

$x^2 + 64 = 225$ بالتبسيط

$x^2 = 161$ خاصية الطرح للمساواة

$x = \sqrt{161} \approx 12.7$

مثال 3

حُلّ المعادلة: $x^2 + 3x - 40 = 0$، باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$ بالتعويض

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$ بالتبسيط

$= -8$ أو 5 بالتبسيط

4-1

الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ عناصر الأشكال الرباعية واستعملتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمّن محيط الدائرة.

المفردات:

الدائرة
circle

المركز
center

نصف القطر
radius

الوتر
chord

القطر
diameter

الدوائر المتطابقة
congruent circles

الدوائر المتحدة في المركز
concentric circles

محيط الدائرة
circumference

باي (π)
pi

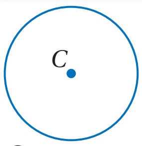
المضلع المُحاط بدائرة
inscribed with a circle

الدائرة الخارجية
circumscribed

لماذا؟

إذا ركبت العجلة الدوَّارة، فإن بُعدك عن مركز دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك ومركزها 44 ft ، فيمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في دورة واحدة.

القطع المستقيمة في الدائرة **الدائرة** هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تُسمّى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يبين الدائرة C التي يمكن أن يرمز لها بالرمز $\odot C$.



الدائرة C أو $\odot C$

وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

مفهوم أساسي — قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أضف إلى مطويتك

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفَيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة.

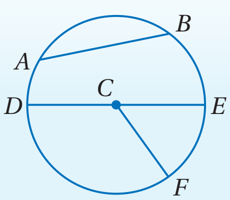
أمثلة : $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ أنصاف أقطار في $\odot C$.

الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.

أمثلة : $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ وتران في $\odot C$.

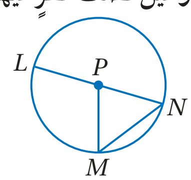
القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفَي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

مثال: $\overline{DE}$ قطرٌ في $\odot C$ ، ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفَي القطرين $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ الواقعين على استقامةٍ واحدة.



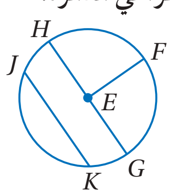
مثال 1 — تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

a) سمِّ الدائرة، وعيّن نصف قطرٍ فيها.



مركز الدائرة هو P؛ إذن يمكن تسميتها الدائرة P ، أو $\odot P$. تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي: $\overline{PL}$, $\overline{PN}$, $\overline{PM}$.

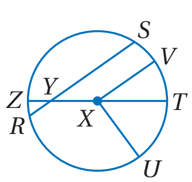
b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.



يظهر في هذه الدائرة وتران هما: $\overline{HG}$, $\overline{JK}$ ، ويمر $\overline{HG}$ بالمركز؛ إذن $\overline{HG}$ قطر.

تحقق من فهمك

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها.



ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأيّ نقطة عليها ثابتة دائمًا؛ إذن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة . وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين؛ فإن أقطار الدائرة جميعها متطابقة.

مفهوم أساسي — العلاقة بين القطر ونصف القطر

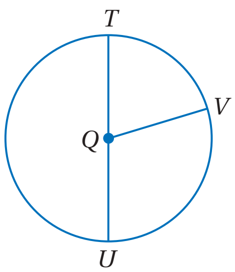
أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d فإن:

صيغة نصف القطر: $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$ **صيغة القطر:** $d = 2r$

مثال 2 — إيجاد نصف القطر والقطر

في الشكل المجاور إذا كان $QV = 8\,\text{cm}$، فأوجد قطر $\odot Q$؟



$d = 2r$ صيغة القطر

$= 2(8) = 16$ بالتعويض والتبسيط

القطر في $\odot Q$ يساوي $16\,\text{cm}$.

تحقق من فهمك : في الشكل المجاور

2A) إذا كان $TU = 14\,\text{ft}$، فأوجد نصف قطر $\odot Q$؟

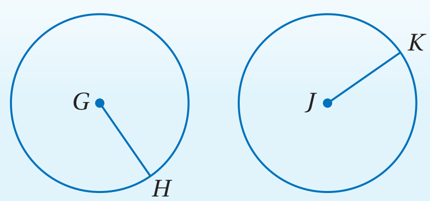
2B) إذا كان $QT = 11\,\text{m}$، فأوجد QU .

كما هو الحال في الأشكال الأخرى، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مفهوم أساسي — أزواج الدوائر

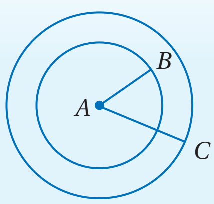
أضف إلى مطويتك

تكون **الدائرتان متطابقتين** إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.



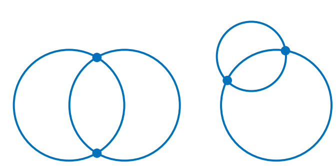
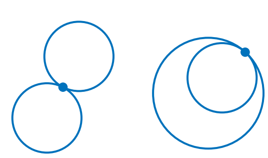
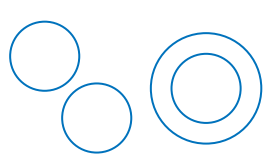
مثال: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ ؛ إذن $\odot G \cong \odot J$

الدائرتان المتحدتان في المركز هما الدائرتان اللتان تقعان في المستوى نفسه، ولهما المركز نفسه.



مثال: $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

إذا تقاطعت دائرتان، فإنه يمكن أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين، والجدول التالي يوضح الأوضاع المختلفة بين دائرتين.

تقاطع في نقطتين	تقاطع في نقطة واحدة	لا يوجد تقاطع
		

قراءة الرياضيات

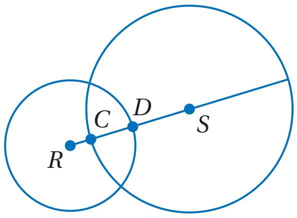
القطر ونصف القطر: تستعمل الكلمتان (القطر، ونصف القطر) للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة. وبما أن للدائرة عدة أنصاف أقطار وعدة أقطار أيضًا، فإن قولنا نصف قطر أو قطر يعني القياس، وليس القطعة المستقيمة.

تنبيه !

القطر أو نصف القطر: في المسائل التي تتضمن الدوائر، انتبه جيدًا إلى ما إذا كانت المعطيات تتعلق بنصف قطر الدائرة أم بقطرها.

القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزَي دائرتين متقاطعتين يمكن أن تحوي نصفَي قطرَي الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين



في الشكل المجاور قطر $\odot S$ يساوي 30 وحدةً، وقطر $\odot R$ يساوي 20 وحدةً، و DS يساوي 9 وحداتٍ، أوجد CD.

بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30 ، فإن $CS = 15$. و $\overline{CD}$ هو جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

$CD + DS = CS$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$CD + 9 = 15$	بالتعويض
$CD = 6$	بطرح 9 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل أعلاه لإيجاد RC .

محيط الدائرة: **محيط الدائرة** هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثّل الدائرة، ويُرمز له بالرمز C، وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمّى **باي (π)**، ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

$\frac{C}{d} = \pi$	تعريف π باي
$C = \pi d$	بضرب كلا الطرفين في d
$C = \pi(2r)$	بالتعويض $d = 2r$
$C = 2\pi r$	بالتبسيط

مفهوم أساسي محيط الدائرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان قطر الدائرة يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r ، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π، أو مثلَي نصف القطر في π .

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من واقع الحياة إيجاد محيط الدائرة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط مع الحياة المجاورة.

$C = \pi d$	صيغة محيط الدائرة
$= \pi(79)$	بالتعويض
$= 79\pi$	بالتبسيط
≈ 248.19	باستعمال الحاسبة

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة.

4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm

4B) القطر يساوي 16 ft

الربط مع الحياة

أُقيمت في عام 2005 م مباراة دولية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق قمة فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة، ويرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريبًا عن سطح الأرض، وقطره 79 ft

يمكنك استعمال إحدى صيغتَي محيط الدائرة، لحساب قطر الدائرة؛ ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها.

مثال 5 إيجاد القطر ونصف القطر

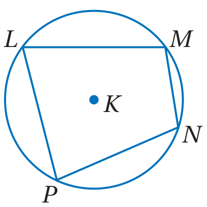
أوجد القطر ونصف القطر مقرّبين إلى أقرب جزءٍ من مئة للدائرة التي محيطها **106.4 mm**

صيغة محيط الدائرة	$C = \pi d$	صيغة نصف القطر	$r = \frac{1}{2}d$
بالتعويض	$106.4 = \pi d$	$d \approx 33.87$	$\approx \frac{1}{2}(33.87)$
بقسمة كلا الطرفين على π	$\frac{106.4}{\pi} = d$	باستعمال الحاسبة	$\approx 16.94\text{ mm}$
باستعمال الحاسبة	$33.87\text{ mm} \approx d$		

تحقق من فهمك

5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة.

يكون المضلّع **محاطًا بدائرة** إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة. وتسمى هذه الدائرة **الدائرة الخارجية**.



- الشكل الرباعي $LMNP$ مُحاط بـ $\odot K$.
- $\odot K$ دائرة خارجية للمضلع $LMNP$.

مثال 6 من اختبار

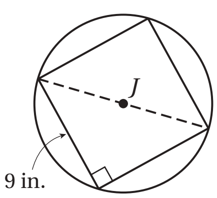
إجابة قصيرة: إذا كانت الدائرة J تحيط بمربع طول ضلعه 9 in، وقطره يمثِّل قطرها، فما القيمة الدقيقة لمحيط $\odot J$.

اقرأ سؤال الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حُلّ سؤال الاختبار

ارسم شكلًا توضيحيًّا فيه: قطر المربع يُمثّل قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.



نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بالتعويض	$9^2 + 9^2 = c^2$
بالتبسيط	$162 = c^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين	$9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}\text{ in}$

أوجد المحيط بدلالة π ، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}\text{ in}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

6A) إذا كانت تحيط بمثلثٍ قائم الزاوية طولا ساقيه $7\text{ m}, 3\text{ m}$

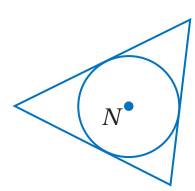
6B) إذا كانت مُحاطَة بمربعٍ طول ضلعه 10 ft

إرشادات للدراسة

مستويات الدّقة: بما أن π عدد غير نسبي، إذان لا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته. ولكن لأغراض الحصول على تقدير سريع في الحسابات، يمكن اعتبار قيمته 3، وإذا استعملت القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$، فستحصل على تقريب أكثر دقة، وللحصول على القيمة الدقيقة استعمل مفتاح π في الحاسبة.

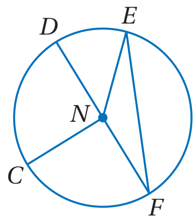
إرشادات للدراسة

الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية: تسمى الدائرة التي تمرّ بجميع رؤوس المضلع الدائرة الخارجية، أما الدائرة التي تمسّ جميع أضلاع المضلع، فتسمّى الدائرة الداخلية، حيث تكون محاطة بالمضلع، كالدائرة في الشكل أدناه.



تأكـد

المثالان 1, 2 استعمل الدائرة في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



1) سمِّ هذه الدائرة.

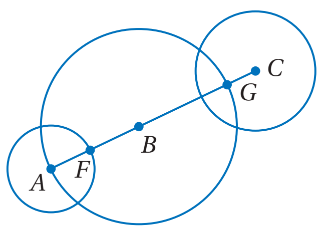
2) عيّن كلًّا ممّا يأتي:

a) وترًا　　b) قطرًا　　c) نصف قطر

3) إذا كان $CN = 8$ cm ، فأوجد DN .

4) إذا كان $EN = 13$ ft ، فما قطر الدائرة؟

المثال 3 قطر كلٍّ من $\odot A, \odot B, \odot C$ يساوي **8 cm , 18 cm , 11 cm** على الترتيب. أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



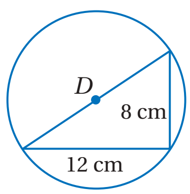
5) FG

6) FB

المثال 4 7) **عجلة دوارة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. ما قطر هذه العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

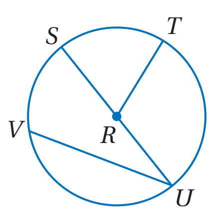
المثال 5 8) **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر هذه البركة؟ وما نصف قطرها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

المثال 6 9) **إجابة قصيرة:** المثلث القائم الزاوية في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D، أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot D$.



تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 عُد إلى $\odot R$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية.



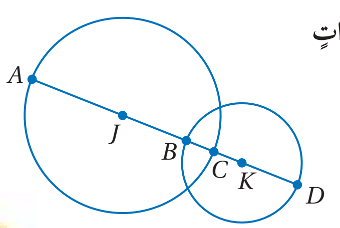
10) ما مركز الدائرة؟

11) عيّن وترًا يكون قطرًا.

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ برِّر إجابتك.

13) إذا كان $SU = 16.2$ cm ، فأوجد RT؟

المثال 3 إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي **10** وحداتٍ، ونصف قطر $\odot K$ يساوي **8** وحداتٍ و BC يساوي **5.4** وحداتٍ، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



14) CK　　15) AB

16) JK　　17) AD

المثال 4

18) بيتزا: أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

19) دراجات: قطر إطار دراجة يساوي 26 in ، أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

المثال 5

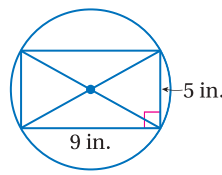
أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

20) $C = 18$ in **21)** $C = 124$ ft **22)** $C = 375.3$ cm **23)** $C = 2608.25$ m

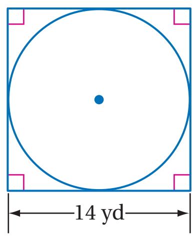
المثال 6

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلٍّ من الدوائر الآتية باستعمال المضلّع الذي تحيط به أو الذي يُحيط بها.

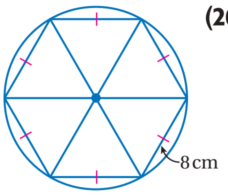
24)



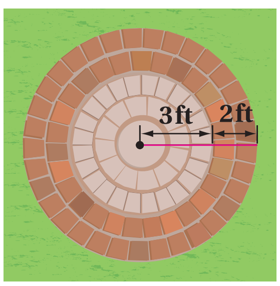
25)



26)



27) فناء: أراد مصطفى أن يرصف فناءً، دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.



a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟

b) إذا غيَّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء، بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة مقرّبًا إلى أقرب قدمٍ؟

في كلٍّ من الأسئلة 31–28، عُلِم نصف قطر أو قطر أو محيط دائرة. أوجد القياسين المجهولين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

28) $d = 8\frac{1}{2}$ in , $r = \underline{?}$, $C = \underline{?}$ **29)** $r = 11\frac{2}{5}$ ft , $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

30) $C = 35x$ cm, $d = \underline{?}$, $r = \underline{?}$ **31)** $r = \frac{x}{8}$, $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

32) حدائق: يُراد إنشاء رصيف عرضه 4 m حول بركة دائرية الشكل محيطها 68 m، فما محيط الرصيف؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

33) تمثيلات متعدّدة: في هذا السؤال ستستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) هندسيًّا: مستعملًا الفرجار ارسم ثلاث دوائر متحدة المركز، بحيث تكون نسبة طول نصف قطر كل دائرة إلى طول نصف قطر الدائرة الأكبر منها تساوي $\frac{1}{2}$

b) جدوليًّا: احسب محيط كلٍّ من الدوائر السابقة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة، وسجّل في جدول نصف القطر والمحيط لكلٍّ منها.

c) لفظيًّا: فسّر لماذا تكون الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًّا.

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول النسبة بين محيطَي الدائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2 .

e) تحليليًّا: معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط محيط $\odot A$ (C_A) بمحيط $\odot B$ (C_B) .

f) عدديًّا: إذا كان معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in ، فما محيط $\odot B$؟

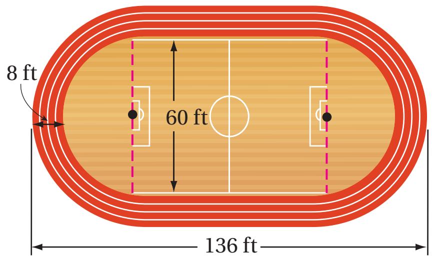
قراءة الرياضيات

الرمزان C_A و C_B :
يقرأ الرمز C_A محيط الدائرة A، ويقرأ الرمز C_B محيط الدائرة B.

الربط مع الحياة

يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 kg حوالي 240 سعرًا حراريًا، إذا ركض بسرعة 9 km/h مدة 20 min ، وذلك أكثر من مثلَي عدد السعرات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h المدة الزمنية نفسها.

34) **رياضة:** يظهر في الصورة أدناه مضمار جري.



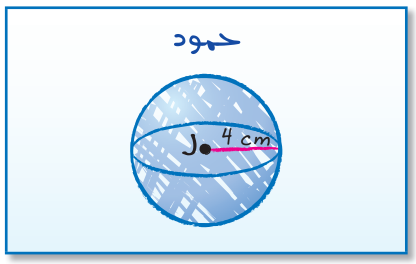
a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، عن المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟

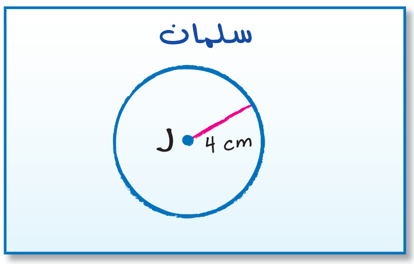
b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص على المسار الخارجي للمضمار؛ ليقطع ميلًا واحدًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا

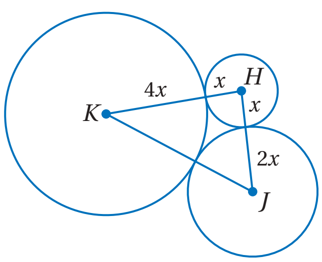
35) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm، ما نصف قطر هذه الدائرة؟

36) **اكتشف الخطأ:** رسم كلّ من حمود وسلمان شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.



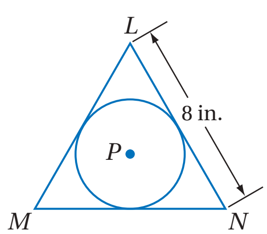


37) **تحدٍّ:** مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π . أوجد KJ .



38) **تبرير:** هل المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

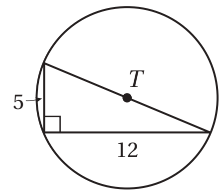
39) **تحدٍّ:** $\odot P$ مُحاطة بالمثلث المتطابق الأضلاع LMN ، كما في الشكل أدناه، ما محيط $\odot P$، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة؟



40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة والدوائر المتحدة في المركز.

تدريب على اختبار

41) ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر.



42) **جبر:** أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج $50\,\text{m}$ ، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عددٍ صحيح.

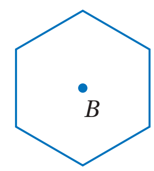
A 10   **C** 8

B 9   **D** 7

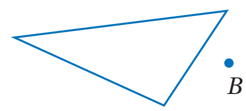
مراجعة تراكمية

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدّد مركزه B ومعامله k المحدّد في كل من الأسئلة الآتية. (مهارة سابقة)

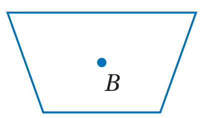
43) $k = \frac{1}{5}$



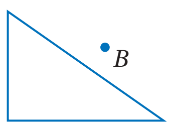
44) $k = \frac{2}{5}$



45) $k = 2$

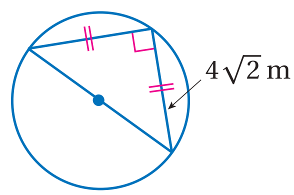


46) $k = 3$

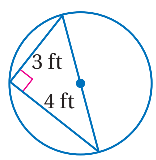


أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل دائرة ممّا يأتي: (الدرس 1-4)

47)



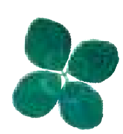
48)



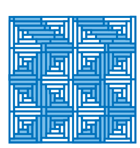
حدّد ما إذا كان يبدو لصورة كلٍّ من الأشكال الآتية تماثل دوراني أم لا؟ وإذا كان كذلك، فانسخ الشكل في دفترك، وحدّد عليه مركز التماثل، واذكر رتبته ومقداره. (مهارة سابقة)

49)

50)



51)

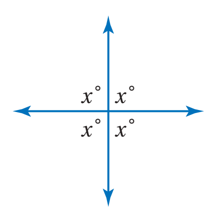


52)

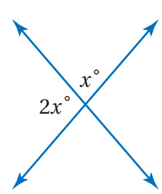
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

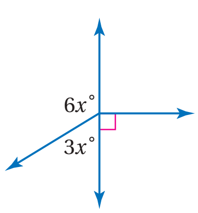
53)



54)



55)



4-2

قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياسات الزوايا وتحديد الزوايا المتطابقة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أعيّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات:

الزاوية المركزية
central angle

القوس
arc

القوس الأصغر
minor arc

القوس الأكبر
major arc

نصف دائرة
semicircle

الأقواس المتطابقة
congruent arcs

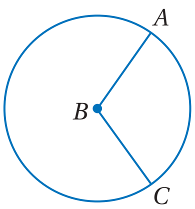
الأقواس المتجاورة
adjacent arcs

طول القوس
arc length

لماذا؟

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام. وتُستعمل الساعات العادية في تزيين المنازل، أو استعمالها ساعات يدوية. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحيانًا هناك مؤشر أو عقرب للثواني.

ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة، وتكوّن العقارب الثلاث زوايا مركزية فيها.

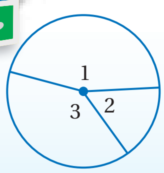


الزوايا والأقواس **الزاوية المركزية** في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$.

تذكّر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمّعة حول نقطة يساوي $360°$؛ لذا فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة، ويؤدي هذا إلى المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — مجموع قياسات الزوايا المركزية

أضف إلى مطويتك

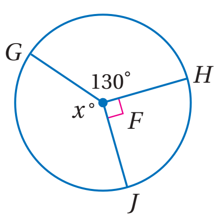


التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

مثال 1 — إيجاد قياس الزاوية المركزية

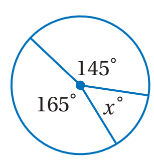
أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



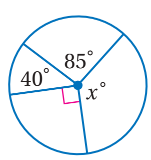
$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$130° + 90° + x = 360°$	بالتعويض
$220° + x = 360°$	بالتبسيط
$x = 140°$	بطرح $220°$ من كلا الطرفين

✓ تحقق من فهمك

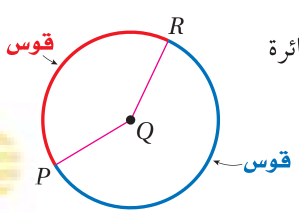
(1A



(1B



القوس هو جزءٌ من دائرة يُحدَّد بنقطتَي طرفَيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كلٍّ منهما بقياس الزاوية المركزية المقابلة له.



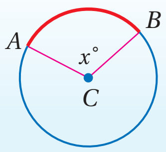
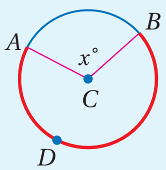
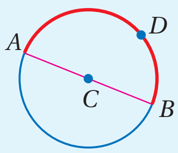
إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس: يُسمَّى القوس الأصغر بنقطتَي طرفيه، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فيسميان بنقطتَي الطرفين بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مفاهيم أساسية

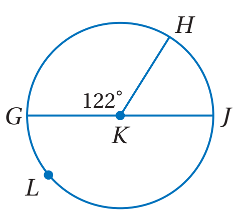
أضف إلى مطويتك

الأقواس وقياسها

القوس	قياسه
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن 180°، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x^\circ$ 
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على 180°، ويساوي 360° مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360^\circ - m\widehat{AB} = 360^\circ - x^\circ$ 
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي 180° $m\widehat{ADB} = 180^\circ$ 

مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياساتها

$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرةٍ، ثم أوجد قياسه.



a) $\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، وقياسه: $m\widehat{GH} = m\angle GKH = 122^\circ$.

b) $\widehat{GLH}$

$\widehat{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$ في نقطتَي طرفيه.

$m\widehat{GLH} = 360^\circ - m\widehat{GH}$

$= 360^\circ - 122^\circ = 238^\circ$

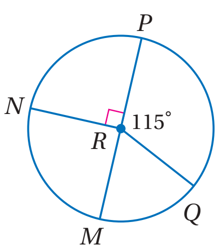
c) $\widehat{GLJ}$

$\widehat{GLJ}$ هو نصف دائرة،

إذن: $m\widehat{GLJ} = 180^\circ$.

تحقق من فهمك

$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



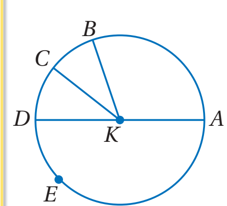
2A) $\widehat{MQ}$ 2B) $\widehat{MNP}$ 2C) $\widehat{MNQ}$

قراءة الرياضيات

الرمز $\frown$

يقرأ الرمز $\frown$ القوس.

في الدائرة أدناه $\widehat{AB}$ يقرأ القوس AB، أما $\widehat{AEC}$ فيقرأ القوس AEC، وكذلك $\widehat{AED}$ فيقرأ القوس AED.



الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، ويكون لها القياس نفسه.

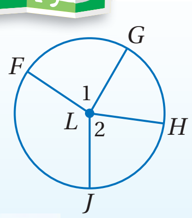
نظرية 4.1

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيّتان المقابلتان لهما متطابقتين.

مثال: إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

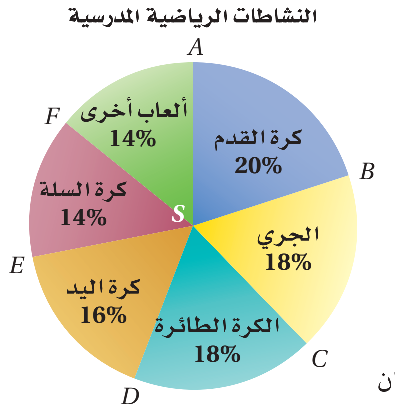
إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



ستبرهن النظرية 4.1 في السؤال 44

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

رياضة: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:



a) $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ هو قوس أصغر.

إذن $m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360°)$ — إيجاد 18% من 360°

$= 64.8°$ — بالتبسيط

b) $m\widehat{BC}$

النسبتان المئويتان للكرة الطائرة والجري متساويتان؛ إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8°$

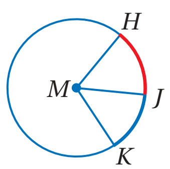
تحقق من فهمك

3A) $m\widehat{EF}$ **3B)** $m\widehat{FA}$

الربط مع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة لأول مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\widehat{JK}$, $\widehat{HJ}$ قوسان متجاوران في $\odot M$، وكما هي الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

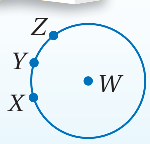


مسلّمة 4.1 — مسلّمة جمع الأقواس

أضف إلى مطويتك

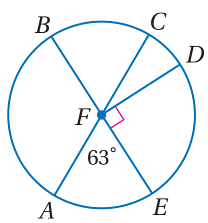
التعبير اللفظي: قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال: $m\widehat{XZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



مثال 4 — إيجاد قياس القوس باستعمال مسلمة جمع الأقواس

أوجد كلاًّ من القياسات الآتية في $\odot F$:



a) $m\widehat{AD}$

$m\widehat{AD} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ — $m\widehat{AE} = m\angle AFE, m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$ — بالتعويض

b) $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= 63° + 180° = 243°$ — $\widehat{EDB}$ نصف دائرة؛ إذن: $m\widehat{EDB} = 180°$

تحقق من فهمك

4A) $m\widehat{CE}$ **4B)** $m\widehat{ABD}$

تنبيه !

طول القوس: يُعطى طول القوس بوحدات الطول مثل السنتمترات، أما قياس القوس فيعطى بالدرجات.

طول القوس: **طول القوس** هو المسافة على الدائرة بين نقطتَي طرفيه، ويُقاس بوحدات الطول، وبما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزءٌ من محيطها.

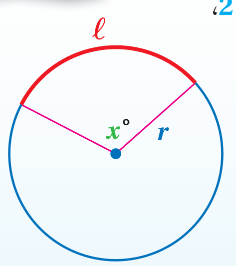
مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان طول القوس يساوي ℓ ومحيط الدائرة يساوي $2\pi r$، وقياس القوس بالدرجات يساوي $x°$ فإن نسبة طول القوس إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى $360°$

الرموز: $\dfrac{\ell}{2\pi r} = \dfrac{x°}{360°}$

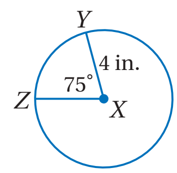
أي أن: $\ell = \dfrac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$



مثال 5 — إيجاد طول القوس

أوجد طول $\widehat{ZY}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

a)

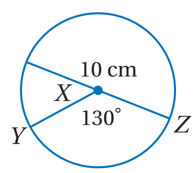


$\ell = \dfrac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \dfrac{75°}{360°} \cdot 2\pi(4)$ بالتعويض

$\approx 5.24 \text{ in}$ باستعمال الحاسبة

b)

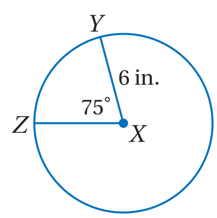


$\ell = \dfrac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \dfrac{130°}{360°} \cdot 2\pi(5)$ بالتعويض

$\approx 11.34 \text{ cm}$ باستعمال الحاسبة

c)



$\ell = \dfrac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \dfrac{75°}{360°} \cdot 2\pi(6)$ بالتعويض

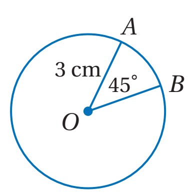
$\approx 7.85 \text{ in}$ باستعمال الحاسبة

لاحظ أن $\widehat{ZY}$ له القياس نفسه في المثالين 5a , 5c، ويساوي °75، إلّا أن لهما طولين مختلفين؛ بسبب وجودهما في دائرتين نصفا قطريهما مختلفان.

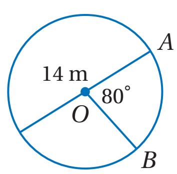
✓ تحقق من فهمك

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

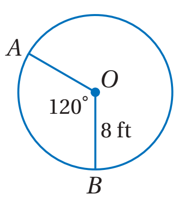
5A)



5B)

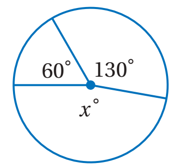


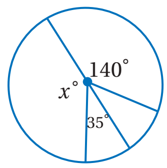
5C)



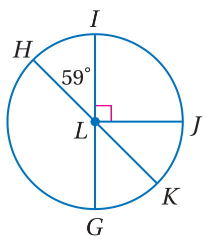
تأكـد

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

1)


2)


المثال 2 $\overline{HK}, \overline{IG}$ قطران في $\odot L$، حدّد ما إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



3) $\widehat{IHJ}$ 4) $\widehat{HI}$ 5) $\widehat{HGK}$

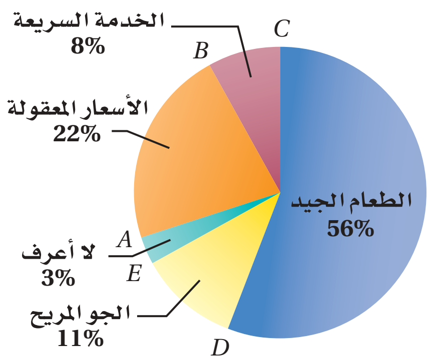
المثال 3 6) **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه روّاد المطاعم.

a) أوجد $m\widehat{AB}$.

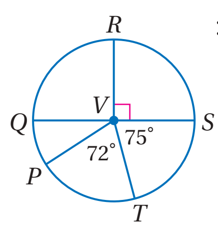
b) أوجد $m\widehat{BC}$.

c) صف نوع قوس قطاع الطعام الجيد.

ما يطلبه روّاد المطاعم



المثال 4 $\overline{QS}$ قطر في $\odot V$، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

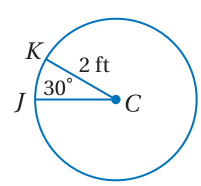


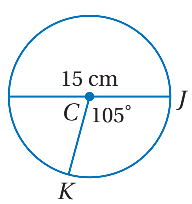
7) $m\widehat{STP}$

8) $m\widehat{QRT}$

9) $m\widehat{PQR}$

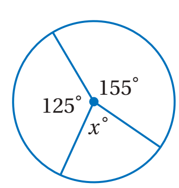
المثال 5 أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

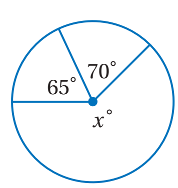
10)


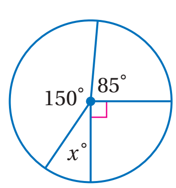
11)


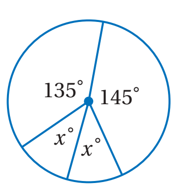
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

12)


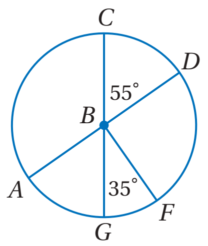
13)


14)


15)


المثال 2

$\overline{AD}$, $\overline{CG}$ قطران في $\odot B$، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممّا يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

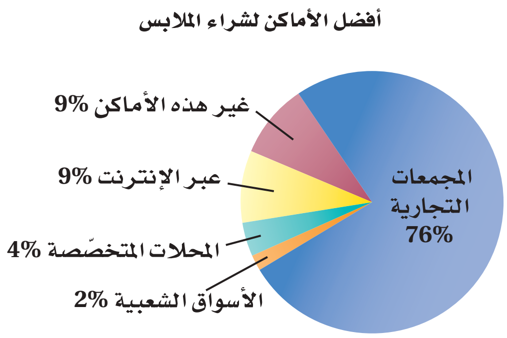


16) $\widehat{CD}$ 17) $\widehat{AC}$ 18) $\widehat{CG}$

19) $\widehat{CGD}$ 20) $\widehat{GCF}$ 21) $\widehat{ACF}$

المثال 3

22) **تسوّق:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.



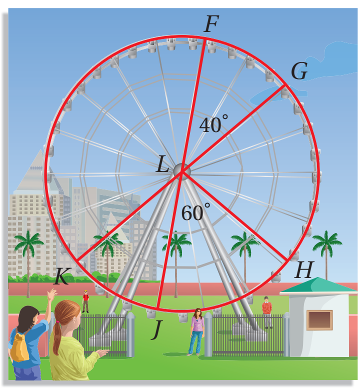
a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كلٍّ من المجمعات التجارية والمحلات المتخصصة؟

b) صِفْ نوع القوس المقابل لفئة المجمعات التجارية وفئة الأسواق الشعبية.

c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك.

المثالان 4 ,2

تسلية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:



23) $m\widehat{FG}$ 24) $m\widehat{JH}$

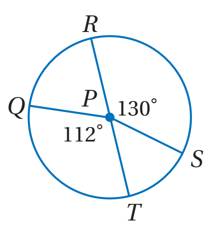
25) $m\widehat{JKF}$ 26) $m\widehat{JFH}$

27) $m\widehat{GHF}$ 28) $m\widehat{GHK}$

29) $m\widehat{HK}$ 30) $m\widehat{JKG}$

المثال 5

$\overline{RT}$ قطر في $\odot P$، أوجد طول كل قوس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



31) $\widehat{RS}$، إذا كان نصف القطر يساوي 2 in .

32) $\widehat{QT}$، إذا كان القطر يساوي 9 cm .

33) $\widehat{QR}$، إذا كان $PS = 4$ mm .

34) $\widehat{QRS}$، إذا كان $RT = 11$ ft .

الربط مع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قُطر واجهتها عن 40 m، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m ، وطول عقرب الساعات 17 m، وتبلغ كتلة كلٍّ منهما 6 أطنان تقريبًا.

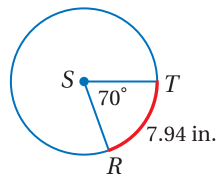
ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

35) ما قياس الزاوية المركزية الصغرى المحصورة بين عقربَي الساعات والدقائق؟ فسّر الطريقة التي توصَّلت بها إلى إجابتك.

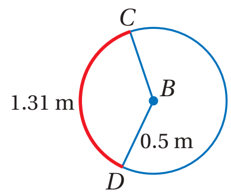
36) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس الأصغر بين الرقم 1 ، والرقم 12؟

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب درجة.

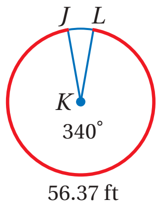
37) محيط $\odot S$



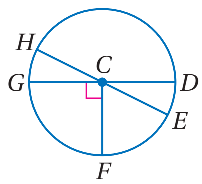
38) $m\widehat{CD}$



39) نصف قطر $\odot K$

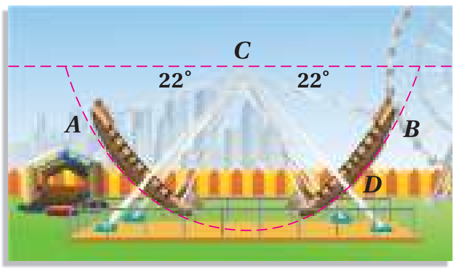


جبر: في $\odot C$، إذا كان $m\angle HCG = (2x)°$, $m\angle HCD = (6x + 28)°$، فأوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي:



40) $m\widehat{EF}$ **41)** $m\widehat{HD}$ **42)** $m\widehat{HGF}$

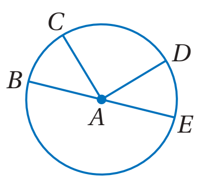
43) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة ألعاب شكل نصف دائرة كما في الشكل المجاور.



a) أوجد $m\widehat{AB}$

b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

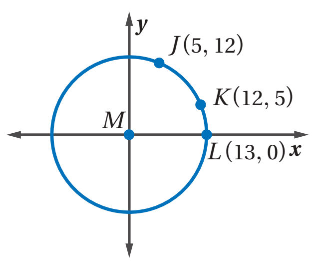
44) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.1.



المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$

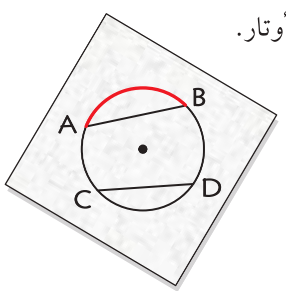
45) **هندسة إحداثية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلًّا مما يأتي في $\odot M$، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الأقواس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\widehat{JL}$ **b)** $m\widehat{KL}$ **c)** $m\widehat{JK}$

d) طول $\widehat{JL}$ **e)** طول $\widehat{JK}$

46) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين الأقواس والأوتار.

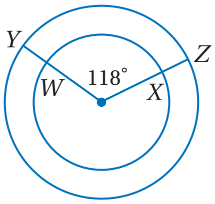


a) **هندسيًّا:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}$, $\overline{CD}$، حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أُخريين ووترين متطابقين في كلٍّ منهما، على أن تكون أطوال الأوتار في الدوائر الثلاث مختلفة.

b) **حسيًّا:** قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفّاف أكبر من كلٍّ من الدوائر الثلاث، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملًا دبّوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس؛ لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر.

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقةً في الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا



47) اكتشف الخطأ: يقول إبراهيم: إن $\widehat{YZ}$, $\widehat{WX}$ متطابقان؛ لأن زاويتيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. هل أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

48) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

49) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

50) يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين في دائرةٍ، على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

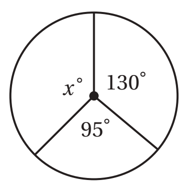
51) مسألة مفتوحة: ارسم دائرةً وعيّن عليها ثلاث نقاط، قدّر قياس الأقواس الثلاثة الناتجة وغير المتداخلة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كلٍّ منها، واكتب على كل قوس قياسه.

52) تحدٍّ: تشير عقارب ساعة إلى 8:10، ما قياس الزاوية المقابلة للقوس الأصغر بين عقربَي الساعة؟

53) اكتب: صِفِ الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة، وطريقة إيجاد قياس كلٍّ منها.

تدريب على اختبار

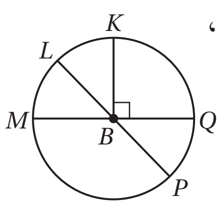
54) أوجد قيمة x؟



A 120　　**C** 145

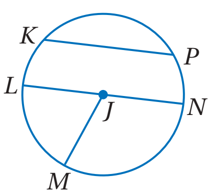
B 135　　**D** 160

55) في $\odot B$ ، إذا كان: $m\angle LBM = (3x)°$ ، $m\angle LBQ = (4x + 61)°$ ، فما قياس $\angle PBQ$؟



مراجعة تراكمية

عُد إلى $\odot J$ في الشكل المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية: (مهارة سابقة)



56) سمِّ مركز الدائرة.

57) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا.

58) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاه إحداثيات رؤوسه، ثم مثّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله k المُعطى في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (مهارة سابقة)

59) $X(-1, 2)$, $Y(2, 1)$, $Z(-1, -2)$ ؛ $k = 3$

60) $A(-4, 4)$, $B(4, 4)$, $C(4, -4)$, $D(-4, -4)$ ؛ $k = 0.25$

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

61) $24^2 + x^2 = 26^2$

62) $x^2 + 5^2 = 13^2$

63) $30^2 + 35^2 = x^2$

4-3 الأقواس والأوتار
Arcs and Chords

فيما سبق:

درستُ استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

(الدرس 4-2)

والآن:

- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

لماذا؟

يستعمل الخيّاطون إطارًا دائريًّا لشد الأقمشة ثم تطريز الزخارف عليها. ويُظهر الشكل المجاور إطارًا دائريًّا، مثبتًا عليه تطريز على شكل نجمة، ويمثّل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتَي قوسٍ في الدائرة، أو نهايتي وترٍ يكوّن أحد أضلاع شكل سداسي رؤوسه على الدائرة.

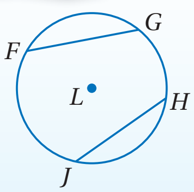
الأقواس والأوتار: لقد تعلمت في الدرس 1-4 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة، وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفَيه يقسمانها إلى قوسين؛ أحدهما قوس أكبر والآخر أصغر.

نظرية 4.2

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

مثال: $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$، إذا وفقط إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.



ستبرهن الجزء 2 من النظرية 4.2 في السؤال 20

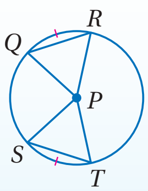
برهان

نظرية 4.2 (الجزء 1: دائرة واحدة)

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

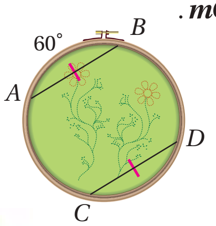
البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$	1) معطيات
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة.
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAS
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

مثال 1 من واقع الحياة: استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

حرف يدوية: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}, m\widehat{AB} = 60°$ في الشكل المجاور، فأوجد $m\widehat{CD}$.



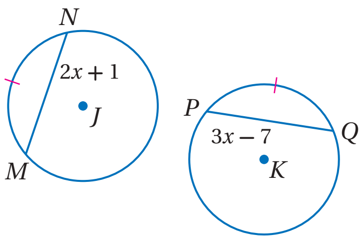
$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ وتران متطابقان؛ إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ متطابقان

أي أنّ: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60°$

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78°$ في الشكل أعلاه، فأوجد $m\widehat{CD}$.

مثال 2 استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار



جبر: إذا كان: $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$, $\odot J \cong \odot K$ ، فأوجد PQ .

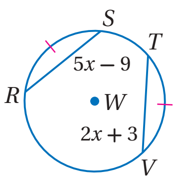
$\widehat{MN}$, $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين؛ لذا فإن الوترين $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ متطابقان.

$MN = PQ$ تعريف القطع المتطابقة

$2x + 1 = 3x - 7$ بالتعويض

$8 = x$ بالتبسيط

إذن: $PQ = 3(8) - 7 = 17$.

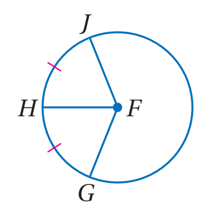


تحقق من فهمك

2) في $\odot W$ ، إذا كان $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$، فأوجد RS.

إرشادات للدراسة

منصّف القوس: في الشكل الآتي $\overline{FH}$ منصّف للقوس $\widehat{JHG}$.



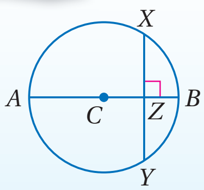
تنصيف الأقواس والأوتار: إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه يُنصّف القوس.

نظريات

أضف إلى مطويتك

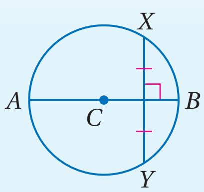
4.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه يُنصّف ذلك الوتر، ويُنصّف قوسه.

مثال: إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ في النقطة Z، فإن: $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$, $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$.



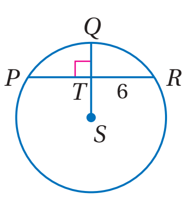
4.4 العمود المنصّف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.

مثال: إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصّفًا للوتر $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



ستبرهن النظريتين 4.3, 4.4 في السؤالين 21, 23 على الترتيب

مثال 3 استعمال نصف القطر العمودي على الوتر



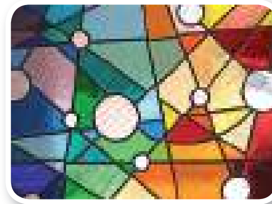
في $\odot S$ ، إذا كان $m\widehat{PR} = 98°$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.

نصف القطر $\overline{SQ}$ يعامد الوتر $\overline{PR}$؛ لذا وبحسب النظرية 4.3 فإن $\overline{SQ}$ يُنصّف $\widehat{PR}$ ؛ إذن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$

$$m\widehat{PQ} = \frac{m\widehat{PR}}{2} = \frac{98°}{2} = 49°$$

تحقق من فهمك

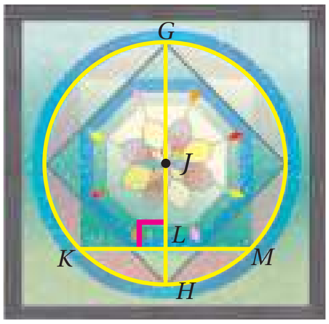
3) أوجد PR في $\odot S$.



الربط مع الحياة

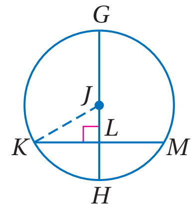
عند صناعة الزجاج الملون، يتمُّ تسخينه حتى درجة حرارة $2000°$، حتى يصبح لزجًا، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لونًا.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطر العمودي على الوتر



زجاج ملون: يبين الشكل المجاور تصميمًا على نافذة ذات زجاج ملوّن، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله $30\,in$، و $\overline{KM}$ وترًا طوله $22\,in$، فأوجد JL.

الخطوة 1: ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيتكوّن $\triangle JKL$ القائم الزاوية.

الخطوة 2: أوجد JK, KL.

بما أن $GH = 30$، فإن $JH = 15\,in$، وبما أن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة، فإن $JK = 15\,in$.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$، فإن $\overline{GH}$ يُنصّف الوتر $\overline{KM}$ وفق النظرية 4.3
إذن: $KL = \frac{1}{2}(22) = 11\,in$.

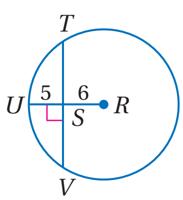
الخطوة 3: أوجد JL باستعمال نظرية فيثاغورس.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$11^2 + JL^2 = 15^2$	بالتعويض
$121 + JL^2 = 225$	بالتبسيط
$JL^2 = 104$	بطرح 121 من كلا الطرفين
$JL = \sqrt{104}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

إذن: $JL = \sqrt{104} \approx 10.20\,in$.

تحقق من فهمك

4) أوجد TV في $\odot R$ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



إرشادات للدراسة

رسم القطع المستقيمة: يمكنك إضافة أي معلومة معروفة إلى الشكل؛ لمساعدتك على حل السؤال، ففي المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

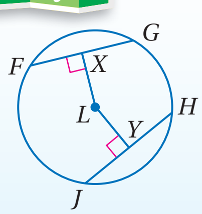
بالإضافة إلى النظرية 4.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

نظرية 4.5

أضف إلى مطويتك

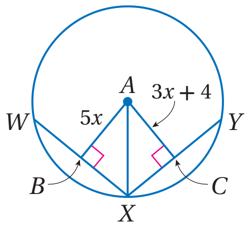
التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$.



ستبرهن النظرية 4.5 في السؤالين 24, 25

مثال 5 الأوتار المتساوية البُعد عن المركز



جبر: في $\odot A$ إذا كان $WX = XY = 22$ ، فأوجد AB .

بما أن الوترين $\overline{WX}, \overline{XY}$ متطابقان. فإن بعديهما عن A متساويان.

إذن:

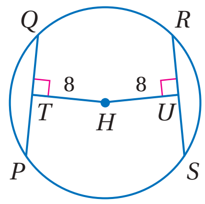
$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بالتبسيط

إذن $AB = 5\,(2) = 10$

تحقق من فهمك

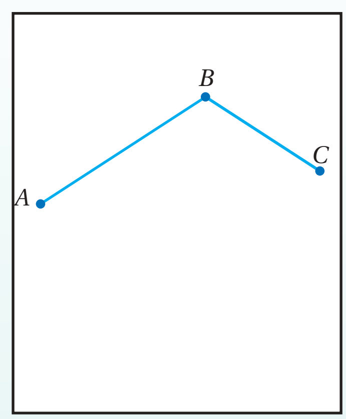


5) في $\odot H$ إذا كان: $PQ = 3x - 4$, $RS = 14$ ، فأوجد قيمة x

يمكنك استعمال النظرية 4.4؛ لإيجاد النقطة التي تبعد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، أو لتعيين مركز دائرة غير معلومة المركز.

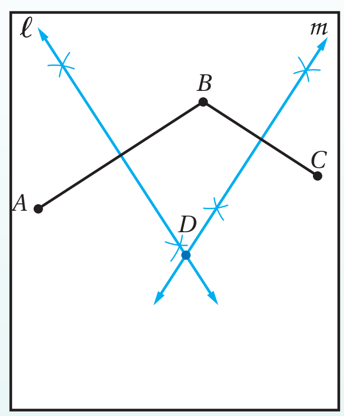
إنشاءات هندسية رسم الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1:



ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

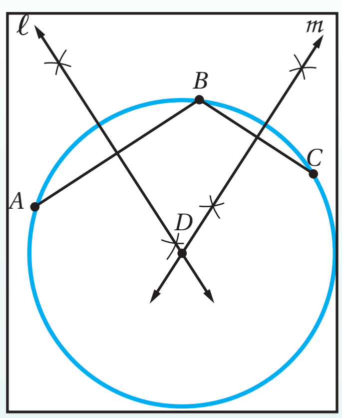
الخطوة 2:



أنشئ العمودين ℓ, m المنصفين للقطعتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

وسمِّ نقطة تقاطعهما D .

الخطوة 3:

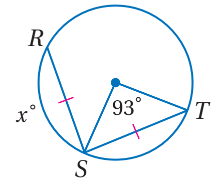


المستقيمان ℓ, m يحويان قطرين في الدائرة المارة بالنقاط الثلاث بحسب النظرية 4.4 ، ونقطة تقاطعهما هي مركز الدائرة. ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمرُّ بالنقاط A, B, C .

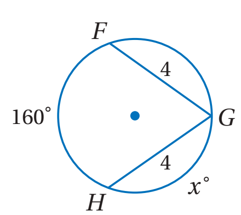
تأكد

المثالان 1, 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

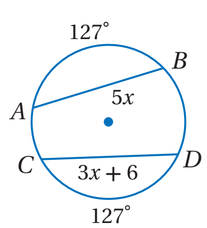
1)



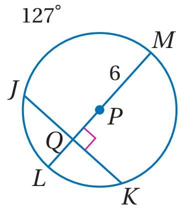
2)



3)



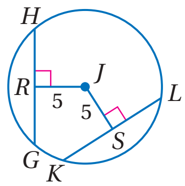
المثالان 3, 4 في $\odot P$ ، إذا كان: $JK = 10$, $m\widehat{JLK} = 134^\circ$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.



4) $m\widehat{JL}$

5) PQ

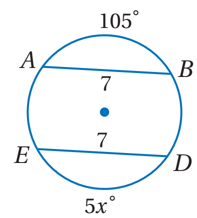
المثال 5 **6)** في $\odot J$ ، إذا كان: $GH = 9, KL = 4x + 1$ ، فأوجد قيمة x .



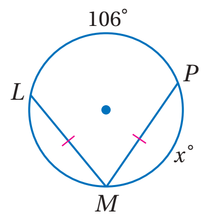
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

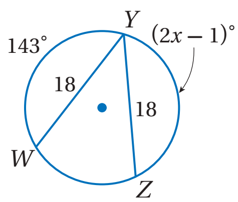
7)



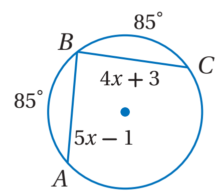
8)



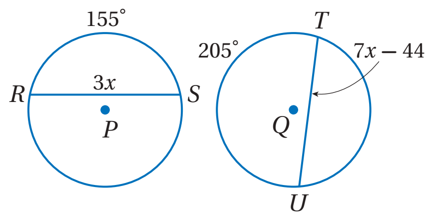
9)



10)



11) $\odot P \cong \odot Q$

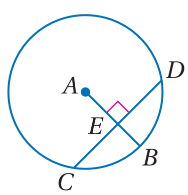


المثالان 3, 4

إذا كان طول نصف قطر $\odot A$ يساوي 14 و $CD = 22$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

12) CE

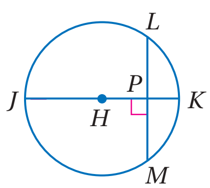
13) EB

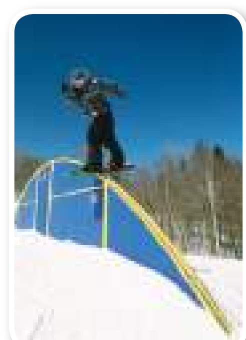


إذا كان طول قطر $\odot H$ يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84°$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

14) $m\widehat{LK}$

15) HP

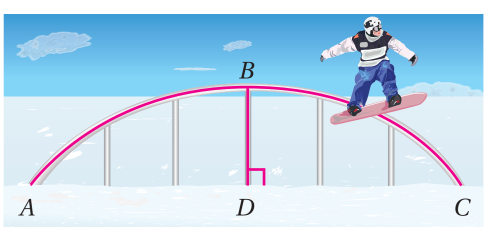




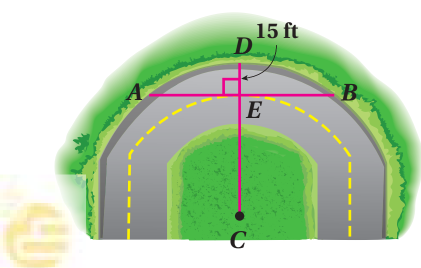
الربط مع الحياة

في مناطق التزلج، يتم تثبيت سكّة تمكّن المتزلّجين من القيام بحركاتٍ بهلوانيةٍ.

16) **تزلج:** سكة التزلّج في الشكل المجاور تأخذ شكل قوس من دائرة، حيث $\overline{BD}$ جزء من قطرها. إذا كان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$؟

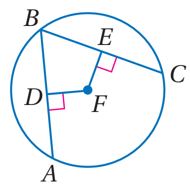


17) **طُرق:** الحافة الخارجية للطريق المنحنية المبيّنة في الشكل المجاور جزء من $\odot C$ التي نصف قطرها 88 ft.
أوجد AB مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

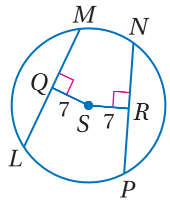


المثال 5

18) **جبر:** في $\odot F$ ، إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، $DF = 3x - 7, FE = x + 9$ ، فأوجد قيمة x .

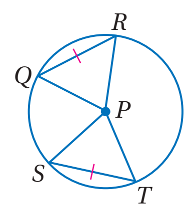


19) **جبر:** في $\odot S$ ، إذا كان: $LM = 16$, $PN = 4x$، فأوجد قيمة x.

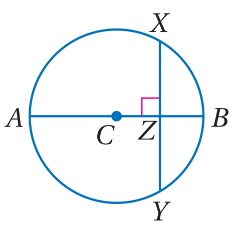


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

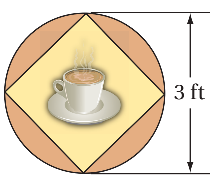
20) برهان حرّ للجزء الثاني من النظرية 4.2 ،
المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ في $\odot P$.
المطلوب: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



21) برهان ذو عمودين للنظرية 4.3 ،
المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{XY}$ في $\odot C$.
المطلوب: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$, $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



22) **تصميم:** صمّم زيد شعارًا لمقهىً كما في الشكل المجاور. إذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4

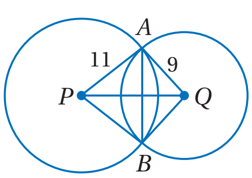
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 4.5 في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

24) إذا تساوَى بُعدا وترين في دائرةٍ عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

25) إذا تطابق وتران في دائرةٍ، فإن بعدَيهما عن مركزها متساويان.

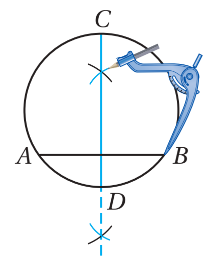
مسائل مهارات التفكير العليا

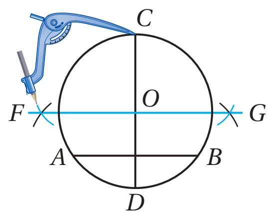
26) **تحدٍّ:** الوتر $\overline{AB}$ المشترك بين $\odot P, \odot Q$ يعُامد القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين، إذا كان $AB = 10$ ، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضّح ذلك.



27) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة و $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X، فهل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟

(28 تحدٍّ: الإنشاء الهندسي أدناه يوضح طريقة تعيين مركز دائرة معطاة.





الخطوة 1: ارسم الوتر $\overline{AB}$، وأنشئ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.

الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$. سمِّ نقطة تقاطع العمودين O.

a) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمرّ بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

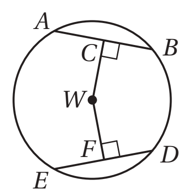
(29 اكتب: إذا أصبح قياس قوس في دائرة ثلاثة أمثال قياسه الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلاً يؤيِّد استنتاجك.

إرشادات للدراسة

البرهان غير المباشر:
تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان بالتناقض تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى نتيجة تناقض المعطيات أو حقيقة مثبتة من قبل أو مسلمة أو تعريف.

تدريب على اختبار

(30 إذا كان: $CW = WF, ED = 30$، فأوجد DF؟



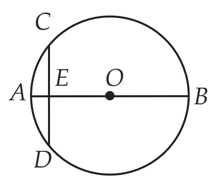
A 60

B 45

C 30

D 15

(31 في $\odot O$، $\overline{AB}$ قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$ ، ويقطعه في النقطة E، إذا كان: $OB = 10$، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$ ؟



A 4

B 6

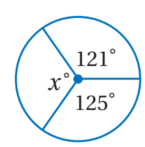
C 8

D 12

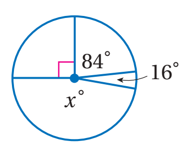
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-4)

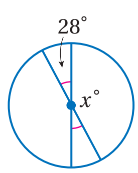
(32



(33



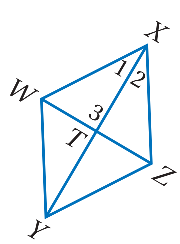
(34



(35 حِرف يدوية: صمّمت شيماء مخططًا لتطريز 10 ورداتٍ على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كلٍّ منها 3.5 in ، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع، فتشكّلت 10 ورداتٍ لكلٍّ منها خمس بتلاتٍ، فكم بوصةً طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب بوصة. (الدرس 1-4)

استعد للدرس اللاحق

جبر: أجب عن السؤالين الآتيين مستعينًا بالمعين $WXZY$:



(36 إذا كان: $m\angle 3 = (y^2 - 31)°$ ، فأوجد y .

(37 إذا كان: $m\angle XZY = 56°$ ، فأوجد $m\angle YWZ$.

الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

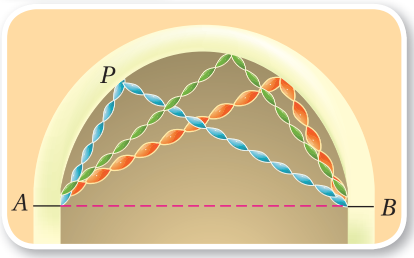
فيما سبق:
درستُ إيجاد قياس الزوايا الداخلية للمضلعات.

(مهارة سابقة)

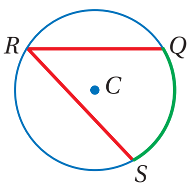
والآن:
- أجد قياسات الزوايا المحيطية.
- أجد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

المفردات:
الزاوية المحيطية
inscribed angle
القوس المقابل
intercepted arc

لماذا؟



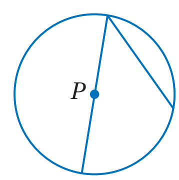
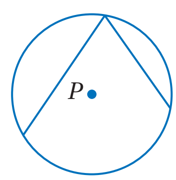
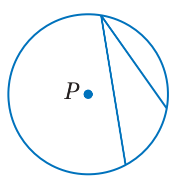
يعلو مدخل قاعة احتفالات قوس على شكل نصف دائرة. زُيّن هذا المدخل بأشرطة ملونة، بحيث ثُبِّت أحد طرفَي كل شريط عند النقطة A، والطرف الآخر عند النقطة B . ثم رفعت الأشرطة، وتم تثبيت كلٍّ منها عند نقطة مختلفة على القوس مثل P ، كما في الشكل المجاور. لاحظ أن الزوايا المتكوّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P .



الزوايا المحيطية: **الزاوية المحيطة** هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة. فالزاوية QRS هي زاوية محيطية في $\odot C$

القوس المقابل للزاوية المحيطية هو قوس يقع داخل الزاوية المحيطية، ويقع طرفاه على ضِلْعَيها. القوس الأصغر $\widehat{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المقابل للزاوية QRS .

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

في الحالة الأولى يكون أحد ضلعَي الزاوية المحيطية قطرًا للدائرة

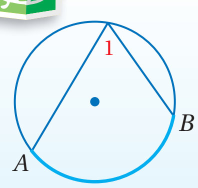
والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

نظرية 4.6 نظرية الزاوية المحيطية

أضف إلى مطويتك

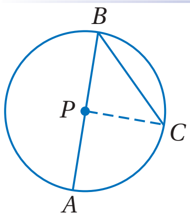
التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$, $m\widehat{AB} = 2m\angle 1$



ستبرهن النظرية 4.6 للحالتين الثانية والثالثة للزاوية المحيطية في السؤالين 28, 29 على الترتيب

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة الأولى)



المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$.

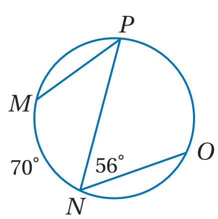
المطلوب: $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان: تعلم أن $\angle B$ محيطية في $\odot P$، وأن $\overline{PB}$ نصف قطر في $\odot P$.

ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$ حيث إن كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا، وهذا سيقودنا إلى:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	1) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
2) $\triangle PBC$ متطابق الضلعين.	2) تعريف المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle B = m\angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
4) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	4) نظرية الزاوية الخارجية
5) $m\angle APC = 2m\angle B$	5) بالتعويض (من الخطوة 3 في الخطوة 4 ثم الجمع)
6) $m\widehat{AC} = m\angle APC$	6) تعريف قياس القوس
7) $m\widehat{AC} = 2m\angle B$	7) بالتعويض (من الخطوة 5 في الخطوة 6)
8) $2m\angle B = m\widehat{AC}$	8) خاصية التماثل للمساواة
9) $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	9) خاصية القسمة للمساواة

مثال 1 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



أوجد القياسين الآتيين مستعملًا الشكل المجاور:

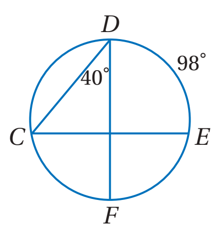
a) $m\angle P$

$$m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{MN}$$
$$= \frac{1}{2}(70°) = 35°$$

b) $m\widehat{PO}$

$$m\widehat{PO} = 2m\angle N$$
$$= 2(56°) = 112°$$

تحقق من فهمك



أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:

1A) $m\widehat{CF}$

1B) $m\angle C$

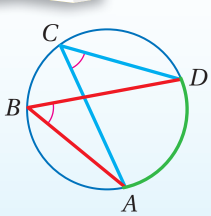
هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيّتين اللتين تقابلان القوس نفسه في دائرة.

نظرية 4.7

أضف إلى مطويتك

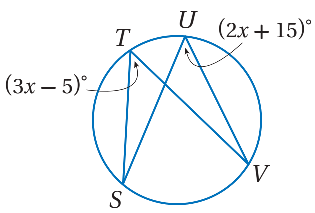
التعبير اللفظي: إذا قابلت زاويتان محيطيّتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال: $\angle B$, $\angle C$ تقابلان $\widehat{AD}$ ، إذن $\angle B \cong \angle C$.



ستبرهن النظرية 4.7 في السؤال 30

مثال 2 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملًا الشكل المجاور.

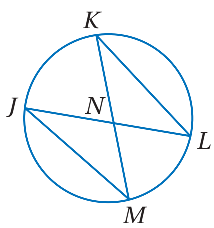
$\angle T \cong \angle U$	$\angle U , \angle T$ كلاهما تقابلان $\widehat{SV}$
$m\angle T = m\angle U$	تعريف تطابق الزوايا
$3x-5 = 2x+15$	بالتعويض
$x = 20$	بالتبسيط

إذن: $m\angle T = (3(20)-5)^\circ = 55^\circ$.

تحقق من فهمك

2) إذا كان: $m\angle S = (3x)^\circ$ ، $m\angle V = (x+16)^\circ$، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه.

مثال 3 استعمال الزوايا المحيطية في البراهين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

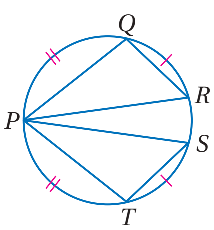
المعطيات: $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

المطلوب: $\triangle JMN \cong \triangle KLN$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$	1) معطيات
2) $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	2) إذا كانت الأقواس متطابقة؛ فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة أيضًا.
3) $\angle M$ تقابل $\widehat{JK}$ $\angle L$ تقابل $\widehat{JK}$	3) تعريف القوس المقابل.
4) $\angle M \cong \angle L$	4) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة.
5) $\angle JNM \cong \angle KNL$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة.
6) $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	6) AAS

تحقق من فهمك



3) اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$, $\widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

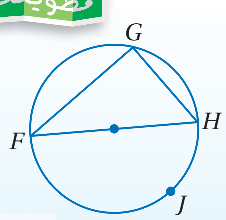
إرشادات للدراسة

المضلعات المحاطة بدائرة: يكون المضلع محاطًا بدائرة، إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة نفسها.

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة: للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

النظرية 4.8

أضف إلى مطويتك



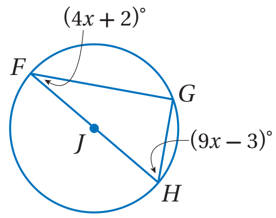
التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال: إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90^\circ$.

إذا كان $m\angle G = 90^\circ$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.

ستبرهن النظرية 4.8 في السؤال 31

مثال 4 إيجاد قياسات زوايا المثلث المحاط بدائرة



جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملًا الشكل المجاور.

$\triangle FGH$ قائم الزاوية؛ لأن $\angle G$ محيطية تقابل نصف دائرة.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180^\circ$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$(4x+2)^\circ + 90^\circ + (9x-3)^\circ = 180^\circ$	بالتعويض
$(13x)^\circ + 89^\circ = 180^\circ$	بالتبسيط
$13x = 91$	بطرح 89 من كلا الطرفين
$x = 7$	بقسمة كلا الطرفين على 13

إذن: $m\angle F = (4(7)+2)^\circ = 30^\circ$.

تحقق من فهمك

4) إذا كان $m\angle F = (7x+2)^\circ$, $m\angle H = (17x-8)^\circ$ ، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل أعلاه.

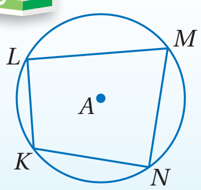
يمكنك إحاطة مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية بدائرة إلاّ أن أنواعًا معينة فقط من الأشكال الرباعية يمكنك إحاطتها بدائرة.

إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية: يمكن إثبات نظرية 4.9 ، بإثبات أن القوسين المقابلين لكل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرة يكوّنان دائرة كاملة.

نظرية 4.9

أضف إلى مطويتك

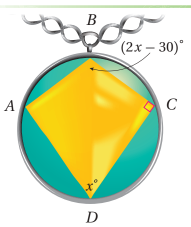


التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$ ، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.

سوف تُبرهن النظرية 4.9 في السؤال 27

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد قياسات الزوايا



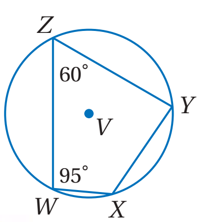
مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل على جوهرة بصورة مضلع رباعي محاط بدائرة، أوجد $m\angle A, m\angle B$.

بما أن $ABCD$ شكل رباعي محاط بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

$m\angle A + m\angle C = 180^\circ$	$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$	كل زاويتين متقابلتين في الرباعي الدائري متكاملتان
$m\angle A + 90^\circ = 180^\circ$	$(2x-30)^\circ + x^\circ = 180^\circ$	بالتعويض
$m\angle A = 90^\circ$	$(3x)^\circ - 30^\circ = 180^\circ$	بالتبسيط
	$3x = 210$	بإضافة °30 لكلا الطرفين
	$x = 70$	بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن: $m\angle A = 90^\circ$, $m\angle B = (2(70)-30)^\circ = 110^\circ$.

تحقق من فهمك

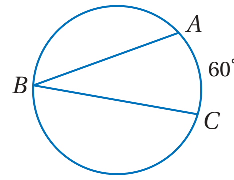


5) المضلع $WXYZ$ شكل رباعي محاط بِـ $\odot V$ ، أوجد $m\angle X, m\angle Y$.

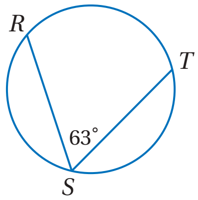
تأكــد

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

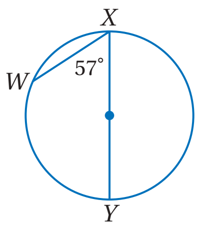
(1 $m\angle B$



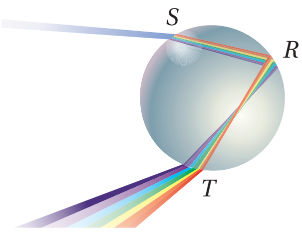
(2 $m\widehat{RT}$



(3 $m\widehat{WX}$

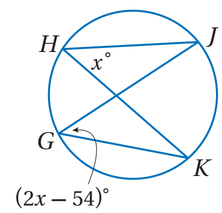


(4 **علوم:** يُبيّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة مطر لإنتاج ألوان الطيف، فإذا كان $m\widehat{ST} = 144°$، فأوجد $m\angle R$؟

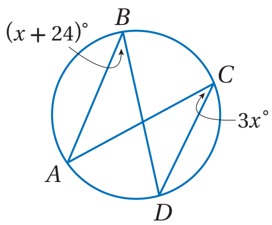


المثال 2 **جبر:** أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

(5 $m\angle H$



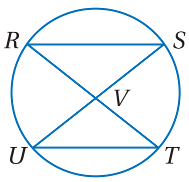
(6 $m\angle B$



المثال 3 (7 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

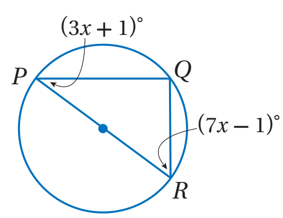
المعطيات: $\overline{RT}$ تُنصِّف $\overline{SU}$.

المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

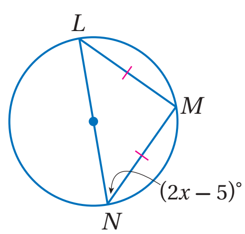


المثالان 4, 5 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

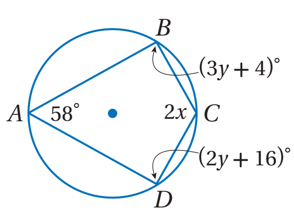
(8 $m\angle R$



(9 x



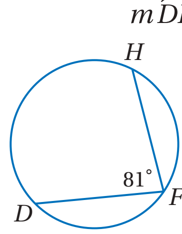
(10 $m\angle C, m\angle D$



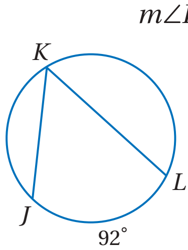
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

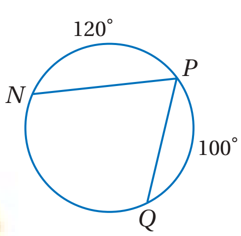
(11 $m\widehat{DH}$



(12 $m\angle K$



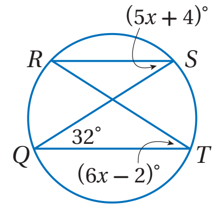
(13 $m\angle P$



المثال 2 **جبر:** أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

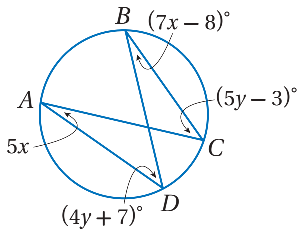
14) $m\angle R$

15) $m\angle S$



16) $m\angle A$

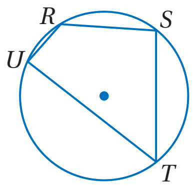
17) $m\angle C$



المثال 3 18) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

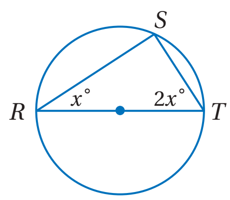
المطلوب: $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{US}$



المثال 4 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

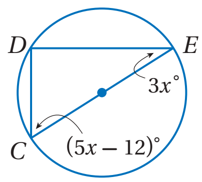
19) x

21) $m\angle T$



20) x

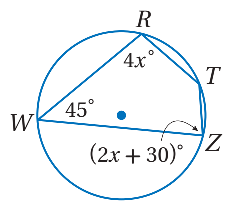
22) $m\angle C$



المثال 5 **جبر:** أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:

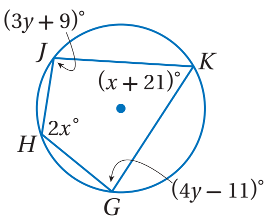
23) $m\angle T$

25) $m\angle Z$



24) $m\angle H$

26) $m\angle G$



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 4.9 .

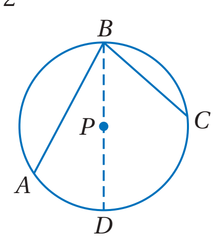
برهان: برهن النظرية 4.6 لحالتَي الزاوية المحيطية في الدائرة فيما يأتي:

28) الحالة الثانية:

المعطيات: يقع المركز P داخل $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

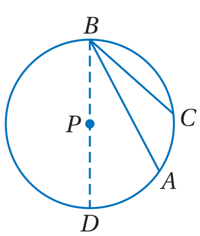


29) الحالة الثالثة:

المعطيات: يقع المركز P خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

30) النظرية 4.7 ، برهانًا ذا عمودين.

31) النظرية 4.8 ، برهانًا حرًّا.

32) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) **هندسيًا:** ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ مستعملًا الفرجار، ثم صِلْ A, D برسم $\overline{AD}$.

b) **عدديًا:** أوجد $m\angle A, m\angle D$ مستعملًا المنقلة، ثم حدّد $m\widehat{AC}, m\widehat{BD}$، ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسّر إجابتك.

c) **لفظيًا:** ارسم دائرةً أخرى وكرّر الخطوتين **a, b**، ثم ضع تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدِّد ما إذا كان يمكن إحاطة كلٍّ من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمكن أبدًا. برّر إجابتك.

33) المربع   34) المستطيل   35) المعين   36) شكل الطائرة الورقية

37) **تحدٍّ:** إذا كان مربع ما محاطًا بدائرة، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

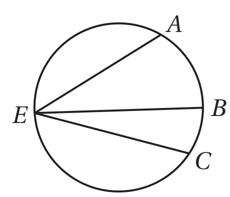
38) **اكتب:** إذا كان مثلث قائم زواياه $45°-45°-90°$ محاطًا بدائرة، وأُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولَي ساقَي هذا المثلث.

39) **مسألة مفتوحة:** أوجد شعارًا من واقع الحياة يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة، وارسمه.

40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة، وإذا كانت هاتان الزاويتان تقابلان القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟

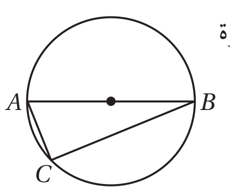
تدريب على اختبار

41) إذا كان: $m\widehat{AC} = 160°$ ، $m\angle BEC = 38°$ ، فأوجد قيمة $m\angle AEB$ مستعملًا الدائرة المجاورة:



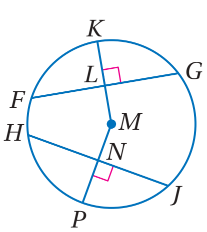
A $42°$ **B** $61°$ **C** $80°$ **D** $84°$

42) **إجابة قصيرة:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة المجاورة، وAC يساوي $8\,\text{in}$ ، و BC يساوي $15\,\text{in}$ ، أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.



مراجعة تراكمية

إذا كان: $m\widehat{HP} = 65°$ ، $FL = 24\,\text{in}, HJ = 48\,\text{in}$، فأوجد كلَّ قياسٍ ممّا يأتي مستعملاً $\odot M$: (الدرس 3-4)



43) FG 44) $m\widehat{PJ}$

45) NJ 46) $m\widehat{HJ}$

استعد للدرس اللاحق

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$، استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي لإيجاد القياسات المجهولة:

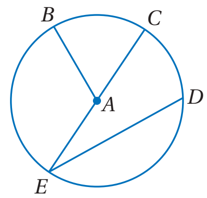
47) $AB = 4x - 5, BC = 11 + 2x, AC = ?$

48) $AB = 10s + 2, AC = 49 + 5s, BC = ?$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 4-1 إلى 4-4

أجب عن الأسئلة 3 –1، مستعينًا بالدائرة أدناه. (الدرس 4-1)



1) سمِّ الدائرة.

2) سمِّ قطرًا.

3) سمّ وترًا لا يكون قطرًا.

4) **دراجة هوائية:** قطر إطار دراجة هوائية يساوي 24 in (الدرس 4-1)

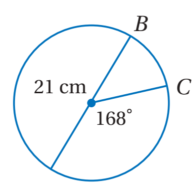
a) أوجد محيط إطار الدراجة.

b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المُعطَى محيطها في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 4-1)

5) $C = 23$ cm **6)** $C = 78$ ft

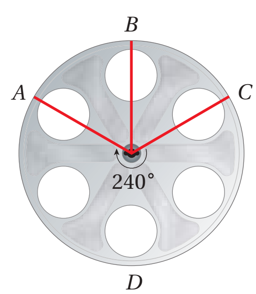
7) **اختيار من متعدد:** أوجد طول $\widehat{BC}$ في الشكل أدناه مقربًا إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس 4-2)



A 2.20 cm **C** 30.79 cm

B 4.40 cm **D** 61.58 cm

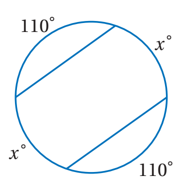
8) **أفلام:** قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه 14.5 in (الدرس 4-2)



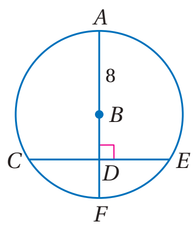
a) أوجد $m\widehat{ADC}$.

b) أوجد طول $\widehat{ADC}$.

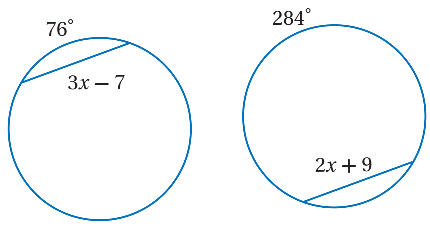
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 4-3)



10) في $\odot B$ ، إذا كان $CE = 13.5$ cm ، فأوجد BD مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

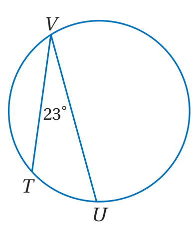


11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 4-3)

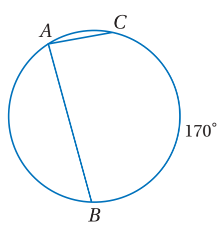


أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-4)

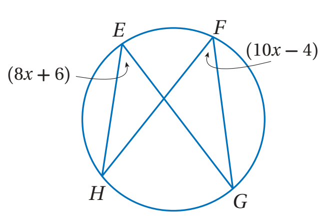
12) $m\widehat{TU}$ في الدائرة أدناه:



13) $m\angle A$ في الدائرة أدناه:



14) **اختيار من متعدّد:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه: (الدرس 4-4)



A 1.8 **C** 5

B 46 **D** 90

15) رُسم مربع طول ضلعه 14 cm، بحيث تقع رؤوسه على دائرةٍ، فما قطر هذه الدائرة؟

4-5 المماسات
Tangents

فيما سبق:

درستُ استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحل مسائل تتضمّن المضلعات المحيطة بدائرة.

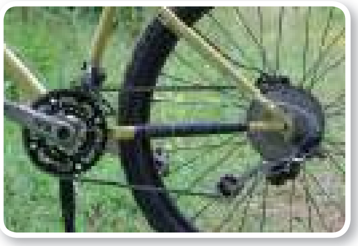
المفردات:

المماس
tangent

نقطة التماس
point of tangency

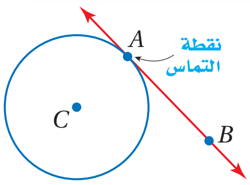
المماس المشترك
common tangent

لماذا؟

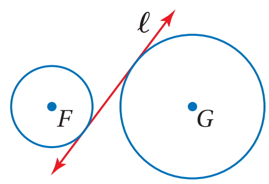


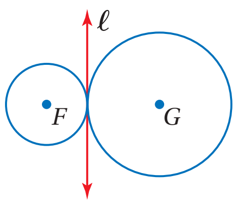
كانت الدراجات الهوائية تُحرّك سابقًا بدفع القدم على الأرض، أمّا الدّراجات الحديثة، فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، حيث تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويُقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتَي تماسِّ السلسلة مع الترسين.

المماسات: **المماس** هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تُسمّى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمّى كلٌّ من $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ مماسًا للدائرة أيضًا.



المماس المشترك هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسه، وفي الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F, G .

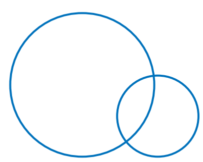




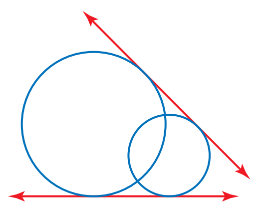
مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

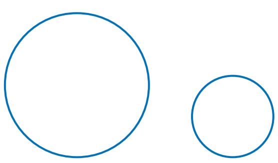
a)



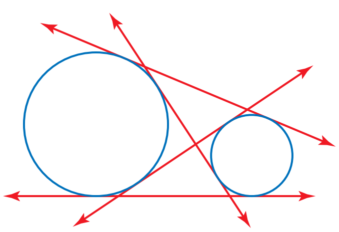
هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان



b)



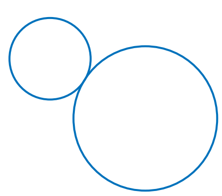
هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة



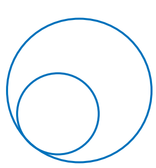
✓ تحقق من فهمك

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

1A)



1B)



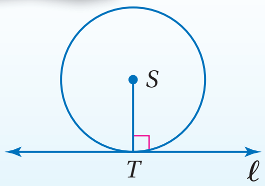
أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

النظرية 4.10

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًا لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

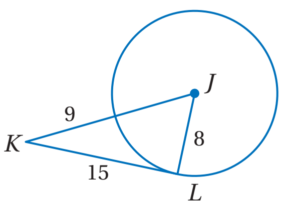
مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.



ستبرهن جزأي النظرية 4.10 في السؤالين 24, 25

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$، حدّد ما إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$ أم لا، برّر إجابتك.

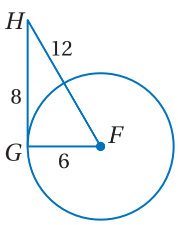


اختبر ما إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8+9)^2$ عكس نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بالتبسيط

لذا فإن $\triangle JKL$ قائم الزاوية في $\angle JLK$؛ أي أن $\overline{KL}$ عمودية على $\overline{JL}$ عند النقطة L.
وبحسب النظرية 4.10 يكون $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$



✓ تحقق من فهمك

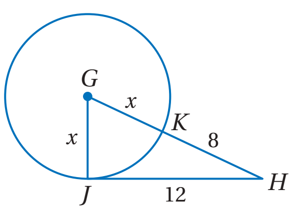
2) حدّد ما إذا كان $\overline{GH}$ مماسًّا لـ $\odot F$ أم لا، برّر إجابتك.

يمكنك استعمال النظرية 4.10 لإيجاد قيم مجهولةٍ.

مثال 3 استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

$\overline{JH}$ مماس لـ $\odot G$ عند J، أوجد قيمة x.

وفقًا للنظرية 4.10، يكون $\overline{GJ} \perp \overline{JH}$، إذن $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.

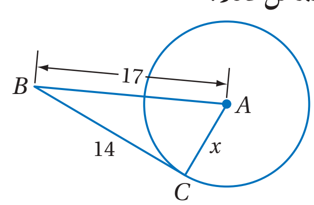


$GJ^2 + JH^2 = GH^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 144 = (x+8)^2$	$GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$
$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$	بالضرب
$80 = 16x$	بالتبسيط
$5 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 16

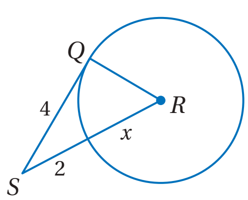
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماسٌّ فعلًا.

(3A

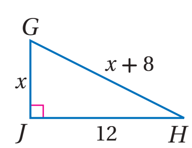


(3B



إرشادات لحل المسألة

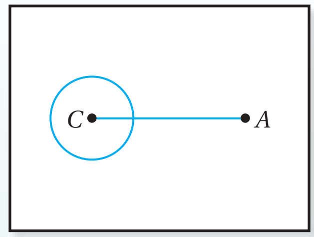
حل مسألة أبسط: يمكنك استعمال استراتيجية حل مسألة أبسط، برسم المثلث القائم من دون الدائرة وتسميته، والشكل أدناه يُبيّن رسم المثلث في المثال 3



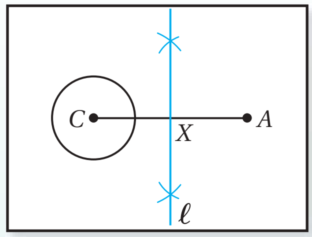
يمكنك استعمال النظريتين 4.10 , 4.8؛ لإنشاء مماسات الدائرة.

إنشاءات هندسية

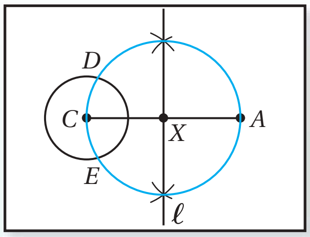
إنشاء مماسٍ لدائرةٍ من نقطة خارجها



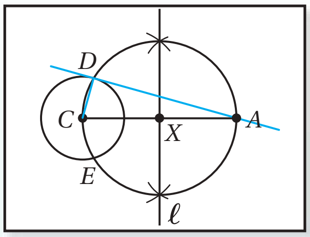
الخطوة 1: ارسم الدائرة C مستعملًا الفرجار، وحدّد نقطة A خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف لـ $\overline{CA}$ وسَمِّه ℓ ، وسمِّ نقطة تقاطع ℓ مع $\overline{CA}$ النقطة X .



الخطوة 3: أنشئ الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$، وسمِّ نقطتَي تقاطع الدائرتين D, E .



الخطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{AD}, \overline{DC}$. $\angle ADC$ تقابل قطرًا للدائرة X ؛ إذن فهي زاوية قائمة؛ لذا فإن $\overleftrightarrow{AD}$ مماسٌّ للدائرة C .

ستنشئ مماسًا لدائرةٍ من نقطةٍ عليها في السؤال 26

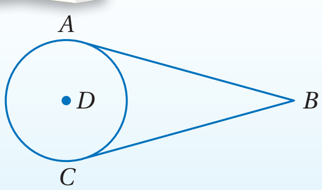
يمكنك أن ترسم مماسين للدائرة نفسها من نقطة واحدة خارجها.

نظرية 4.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

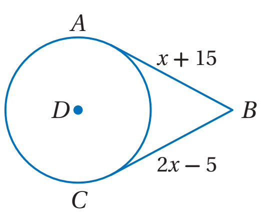
مثال: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان لـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



ستبرهن النظرية 4.11 في السؤال 22

مثال 4 استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد قياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان للدائرة D ، فأوجد قيمة x .

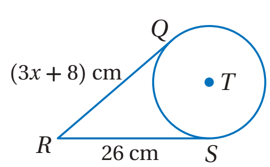


$AB = CB$	المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان
$x + 15 = 2x - 5$	بالتعويض
$15 = x - 5$	بطرح x من كلا الطرفين
$20 = x$	بإضافة 5 لكلا الطرفين

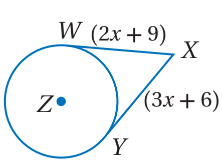
تحقق من فهمك

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماسٌّ فعلًا.

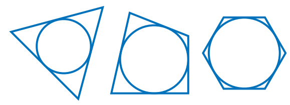
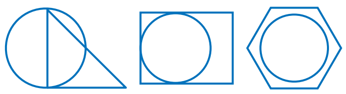
4A)



4B)



المضلّعات المحيطة بدائرة: يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًّا للدائرة.

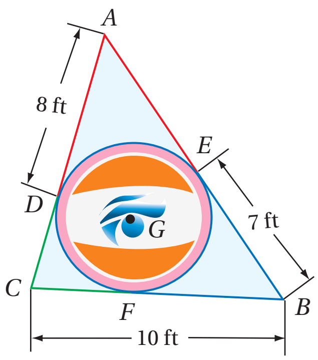
مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

يمكنك استعمال النظرية 4.11؛ لإيجاد قياسات مجهولة في المضلّعات المحيطة بدائرة.

تنبيه !

تحديد المضلّعات المحيطة بدائرة: إذا مسّت الدائرة بعض أضلاع المضلع ولم تمسها جميعها، فلا يُعدُّ المضلع محيطًا بالدائرة، وهذا ما يتضح في الجدول.

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة



تصميم مصور: صمَّم منصور الشعار المبيّن في الشكل المجاور، إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G ، فأوجد محيطه.

الخطوة 1: أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G ، فإن $\overline{AE}, \overline{AD}$ مماسَّان للدائرة $\odot G$ ، وكذلك $\overline{BE}, \overline{BF}$ ، $\overline{CF}, \overline{CD}$ مماسات أيضًا.

إذن: $\overline{AE} \cong \overline{AD}, \overline{BF} \cong \overline{BE}, \overline{CF} \cong \overline{CD}$

لذا فإن: $AE = AD = 8\text{ ft}, BF = BE = 7\text{ ft}$.

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن $CF + FB = CB$

إذن: $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3\text{ ft}$ ؛ لذا فإن: $CD = CF = 3\text{ ft}$.

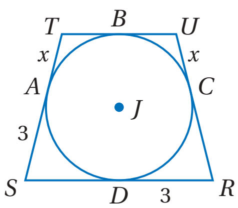
الخطوة 2: أوجد محيط $\triangle ABC$.

المحيط يساوي:

$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36 ft .

تحقق من فهمك

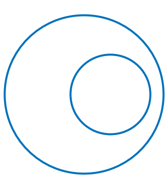


5) الشكل الرباعي $RSTU$ محيط بالدائرة J ، إذا كان محيطه 18 وحدة، فأوجد قيمة x .

تأكد

المثال 1

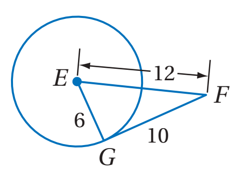
1) ارسم المماسات المشتركة للدائرتين المجاورتين، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".



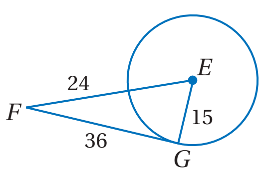
المثال 2

حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ في كلٍّ من الشكلين الآتيين مماسًّا للدائرة E أم لا، وبرّر إجابتك.

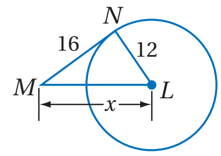
2)

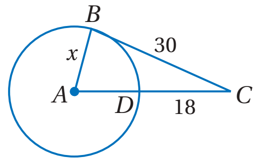


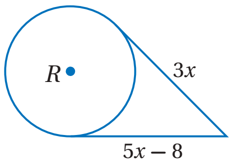
3)



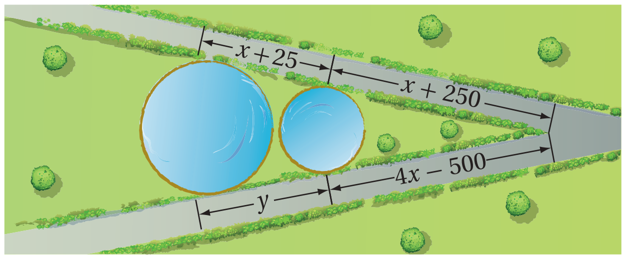
المثالان 4 ,3 أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

(4


(5


(6


7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممَّرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال معطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كلٍّ من x و y.

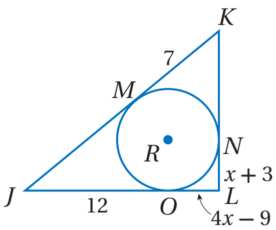


المثال 5

8) **جبر:** المثلث JKL يُحيط بالدائرة R.

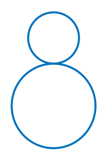
a) أوجد قيمة x.

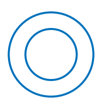
b) أوجد محيط $\triangle JKL$.

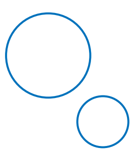


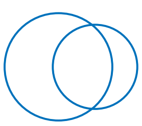
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

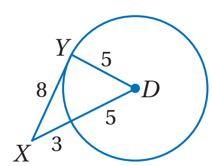
(9


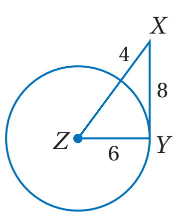
(10


(11


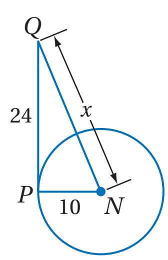
(12


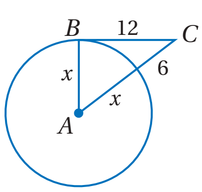
المثال 2 حدّد ما إذا كانت $\overline{XY}$ مماسًا للدائرة المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين أم لا، وبرّر إجابتك.

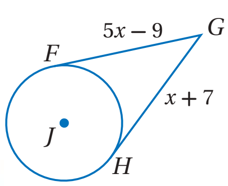
(13


(14


المثالان 4 ,3 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

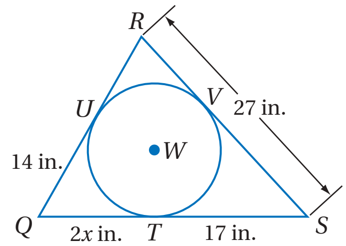
(15


(16


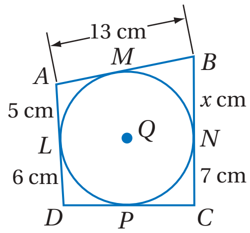
(17


المثال 5 إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x، ثم أوجد محيط المضلّع في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(18



(19

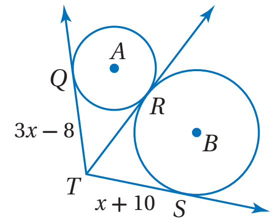


إرشادات للدراسة

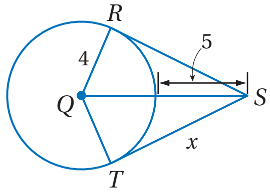
تحديد المماسات: لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك إلا إذا طُلب إليك ذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة أو أن تكون الأطوال المبيّنة على الشكل تؤكّد أن الزاوية قائمة.

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

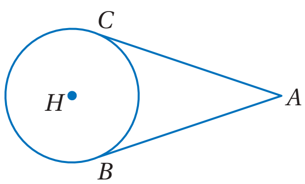
(20



(21



اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



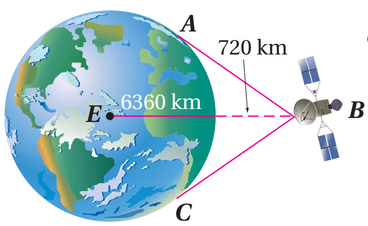
(22 برهان ذي عمودين للنظرية 4.11

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة C.

$\overline{AB}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة B.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

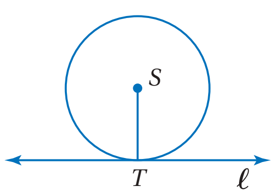
(23 **أقمار اصطناعية:** يرتفع قمر اصطناعيٌّ مسافة 720 km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km، ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ من سطح الأرض. أوجد BA مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



الربط مع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الاصطناعية ومخلفاتها التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km في الثانية تقريبًا.

(24 **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر، لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماسًّا للدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف قطرها (الجزء 1 من النظرية 4.10)

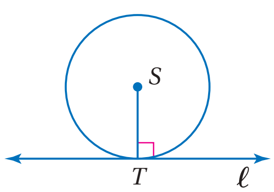


المعطيات: ℓ مماس للدائرة S عند T؛ $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$).

(25 **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عموديًّا على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقائهما على الدائرة؛ فإنه مماسٌّ لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 4.10)



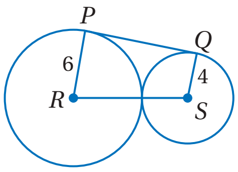
المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن ℓ مماس للدائرة S .

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس مماسًّا للدائرة S).

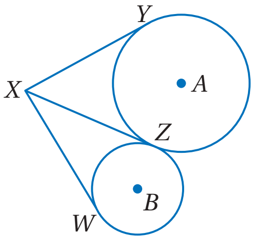
26) **إنشاءات هندسية:** أنشئ مماسًّا لدائرة من نقطة واقعة عليها باتباع الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملًا الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$، ثم أنشئ مستقيمًا عموديًّا على $\overleftrightarrow{AP}$ يمر بالنقطة P، وسمِّ المماس المستقيم t.

مسائل مهارات التفكير العليا



27) **تحدٍّ:** $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R, S كما في الشكل المجاور. أوجد PQ، وبرِّر إجابتك.

28) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا يُحيط بدائرة، ومثلثًا محاطًا بدائرة.



29) **تبرير:** $\overline{XY}, \overline{XZ}$ مماسان للدائرة A، و $\overline{XW}$, $\overline{XZ}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور. فسّر لماذا تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}, \overline{XZ}, \overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفَي قطرَي الدائرتين مختلفان.

30) **اكتب:** ما عدد مماسات الدائرة التي يمكن رسمها من نقطة خارجها، ومن نقطة عليها، ومن نقطة داخلها؟ برِّر إجابتك.

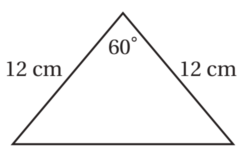
تدريب على اختبار

31) نصف قطر $\odot P$ يساوي 10 cm، و $\overline{ED}$ مماسٌّ لها عند D، وتقع F على $\odot P$ وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24\text{ cm}$، فما طول $\overline{EF}$؟

A 10 cm　　**C** 21.8 cm

B 16 cm　　**D** 26 cm

32) ما محيط المثلث المجاور؟



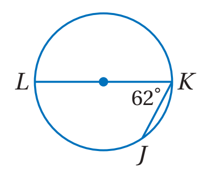
A 24 cm　　**C** 36 cm

B 34.4 cm　　**D** 104 cm

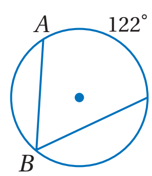
مراجعة تراكمية

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي: (الدرس 4-4)

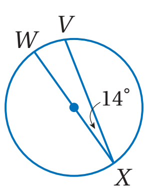
33) $m\widehat{JK}$



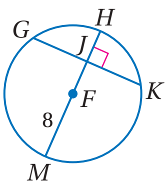
34) $m\angle B$



35) $m\widehat{VX}$



في $\odot F$، إذا كان: $m\widehat{GK} = 142°$, $GK = 14\text{ cm}$، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 4-3)



36) $m\widehat{GH}$　　37) JK　　38) $m\widehat{KM}$

استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

39) $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$

40) $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$

41) $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$

4-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا
Secant, Tangent, and Angle Measures

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكوّنة من مماساتٍ للدائرة.

(الدرس 5-4)

والآن:

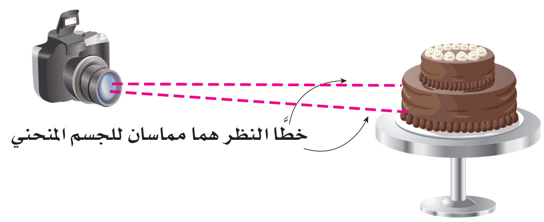
- أجد قياسات الزوايا المتكوّنة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.
- أجد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

المفردات:

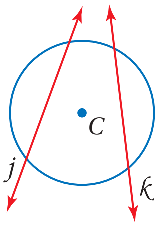
القاطع
secant

لماذا؟

معدل مجال الرؤية عند الإنسان يساوي °180 تقريبًا، ولكن زاوية الرؤية في معظم آلات التصوير أضيق من ذلك بكثير، فهي تتراوح بين °20 و°50. وتُحدّد زاوية الرؤية في آلات التصوير مقدار ما يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على الفيلم من الأجسام المنحنية.



التقاطع على الدائرة أو داخلها: **القاطع** هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، فالمستقيمان j, k هما قاطعان للدائرة C.

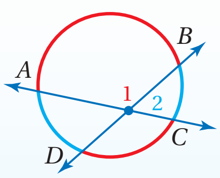


عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة؛ فإن الزوايا المتكوّنة ترتبط بالأقواس التي تقابلها.

نظرية 4.12

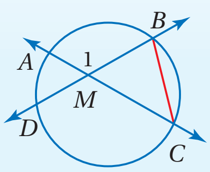
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

برهان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة ويتقاطعان داخلها في M.

المطلوب: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

البرهان: تعلم أن $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة، وأنهما يتقاطعان داخلها في M.

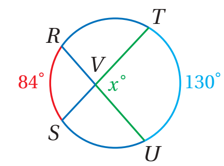
ارسم القطعة المستقيمة BC؛ لتحصل على المثلث MBC وهذا سيقودنا إلى ما يلي:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 = m\angle MBC + m\angle MCB$	1) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
2) $m\angle MBC = \frac{1}{2}m\widehat{DC},\ m\angle MCB = \frac{1}{2}m\widehat{BA}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
3) $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{DC} + \frac{1}{2}m\widehat{BA}$	4) بالتعويض
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} + m\widehat{BA})$	4) خاصية التوزيع

مثال 1 استعمال القاطعين أو الوترين المتقاطعين

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية:

a)

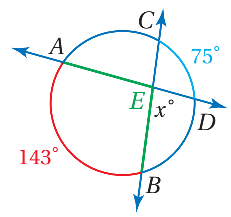


$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{UT})$ النظرية 4.12

$x° = \frac{1}{2}(84° + 130°)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(214°) = 107°$ بالتبسيط

b)



الخطوة 1: أوجد $m\angle AEB$.

$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$ النظرية 4.12

$= \frac{1}{2}(143° + 75°)$ بالتعويض

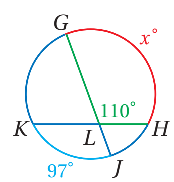
$= \frac{1}{2}(218°) = 109°$ بالتبسيط

الخطوة 2: أوجد قيمة x؛ أي قياس $\angle DEB$.

$\angle AEB , \angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

$x° = 180° - 109° = 71°$

c)



$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{HG} + m\widehat{KJ})$ النظرية 4.12

$110° = \frac{1}{2}(x° + 97°)$ بالتعويض

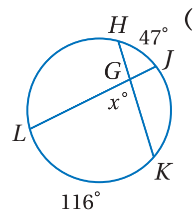
$220° = (x° + 97°)$ بضرب كلا الطرفين في 2

$123° = x°$ بطرح 97 من كلا الطرفين

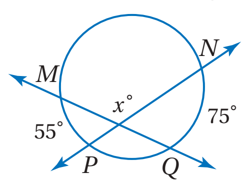
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية:

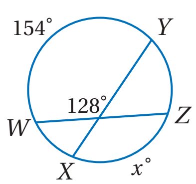
1A)



1B)



1C)



إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: في المثال 1b، يمكنك إيجاد $m\angle DEB$ بحساب مجموع قياسَي $\widehat{AC} , \widehat{BD}$ أولًا.

$m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$

$= 360° - (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

$= 360° - (143° + 75°)$

$= 142°$

$m\angle DEB$

$= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$

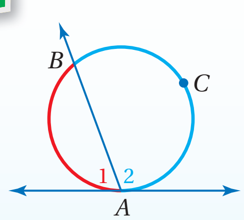
$= \frac{1}{2}(142°) = 71°$

تذكّر النظرية 4.6 ، والتي تنصُّ على أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها، وتبقى هذه النظرية صحيحة إذا كان أحد ضلعَي الزاوية مماسًّا للدائرة، وتسمى الزاوية في هذه الحالة الزاوية المماسية.

نظرية 4.13 نظرية الزاوية المماسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

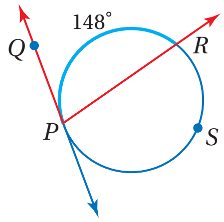


مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ACB}$

ستبرهن النظرية 4.13 في السؤال 27

مثال 2 استعمال القاطع والمماس المتقاطعين

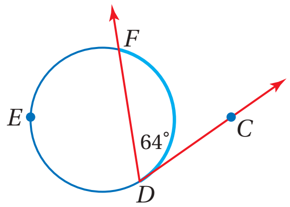
أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



a) $m\angle QPR$

$m\angle QPR = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{PR}$ النظرية 4.13

$= \frac{1}{2}(148°) = 74°$ بالتعويض والتبسيط



b) $m\overset{\frown}{DEF}$

$m\angle CDF = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{FD}$ النظرية 4.13

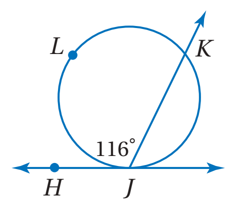
$64° = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{FD}$ بالتعويض

$128° = m\overset{\frown}{FD}$ بضرب كلا الطرفين في 2

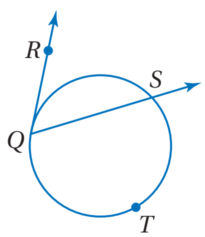
$m\overset{\frown}{DEF} = 360° - m\overset{\frown}{FD} = 360° - 128° = 232°$

تحقق من فهمك

2A) أوجد $m\overset{\frown}{JLK}$.



2B) إذا كان: $m\overset{\frown}{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$.



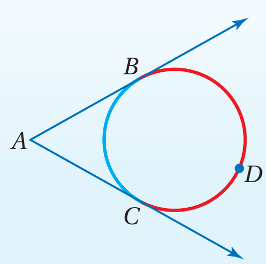
التقاطع خارج الدائرة: يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج الدائرة أيضًا، وهنا يرتبط قياس الزوايا المتكونة بقياسَي القوسين المقابلين لها.

نظرية 4.14

أضف إلى مطويتك

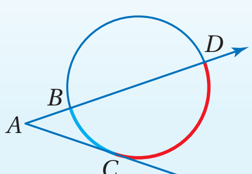
التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



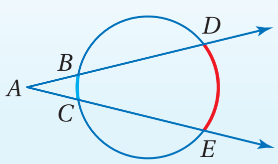
مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BDC} - m\overset{\frown}{BC})$



قاطع ومماس

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DC} - m\overset{\frown}{BC})$



قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DE} - m\overset{\frown}{BC})$

ستبرهن النظرية 4.14 في الأسئلة 24–26

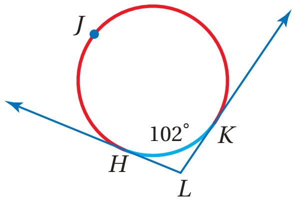
إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة: يمكن التعبير عن قياس $\angle A$ في الحالات جميعها بنصف القيمة المطلقة للفرق بين قياسَي القوسين، وهكذا لا يؤثّر ترتيب القوسين في نتيجة الحسابات.

مثال 3 استعمال المماسات والقواطع التي تتقاطع خارج الدائرة

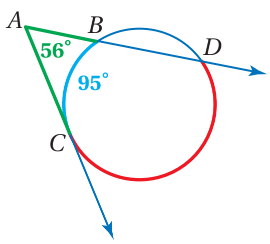
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle L$



$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$	النظرية 4.14
$= \frac{1}{2}[(360° - 102°) - 102°]$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(258° - 102°) = 78°$	بالتبسيط

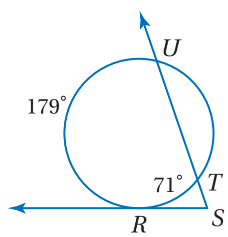
b) $m\widehat{CD}$



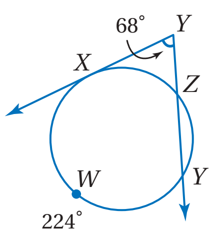
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$	النظرية 4.14
$56° = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95°)$	بالتعويض
$112° = m\widehat{CD} - 95°$	بضرب كلا الطرفين في 2
$207° = m\widehat{CD}$	بإضافة 95 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

3A) $m\angle S$



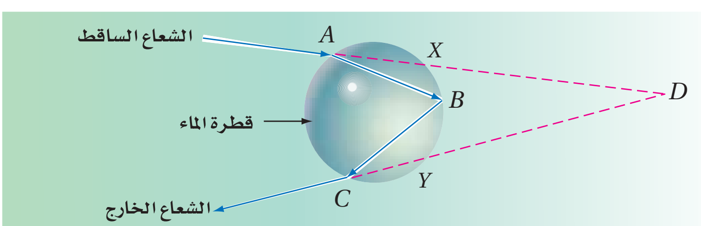
3B) $m\widehat{XZ}$



يمكنك تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة، لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة خارج الدائرة

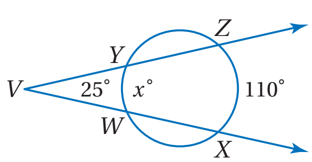
علوم: يُبيّن الشكل أدناه انكسار شعاع ضوء في قطرة ماء، وانحرافه عن مساره عند النقاط A, B, C، إذا كان $m\widehat{AC} = 128°$ و $m\widehat{XY} = 84°$ ، فما قيمة $m\angle D$؟



$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XY})$	نظرية 4.14
$= \frac{1}{2}(128° - 84°)$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(44°) = 22°$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



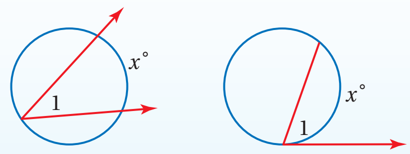
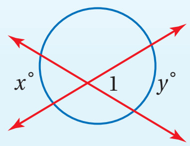
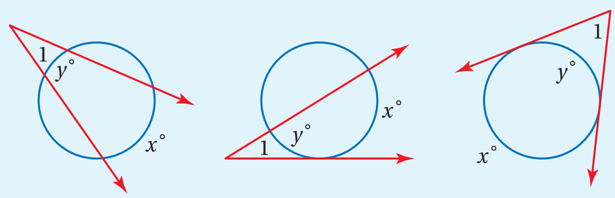
الربط مع الحياة

يتفاوت معامل الانكسار من وسط إلى آخر، ويُعبّر عن معامل الانكسار N لوسط شفافٍ ما بالصيغة $N = \frac{c}{V}$، حيث c سرعة الضوء في الفراغ و V سرعة الضوء في ذلك الوسط.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

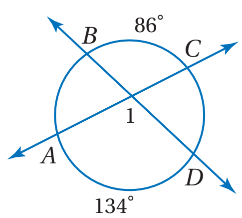
الدائرة وعلاقات الزوايا

موقع رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		نصف قياس القوس المقابل $m\angle 1 = \frac{1}{2}x°$
داخل الدائرة		نصف مجموع قياسَي القوس المقابل للزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x° + y°)$
خارج الدائرة		نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلَين لها $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x° - y°)$

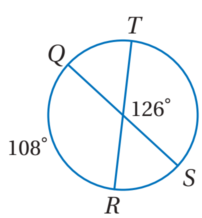
تأكد

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

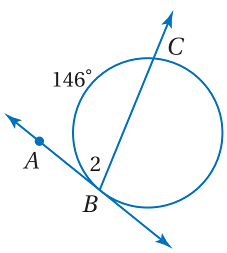
(1 $m\angle 1$



(2 $m\widehat{TS}$

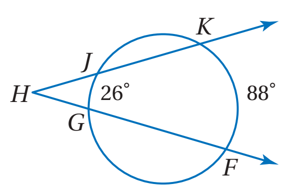


(3 $m\angle 2$

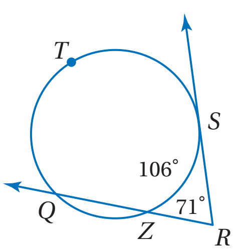


المثالان 3, 4

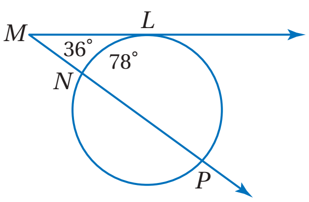
(4 $m\angle H$



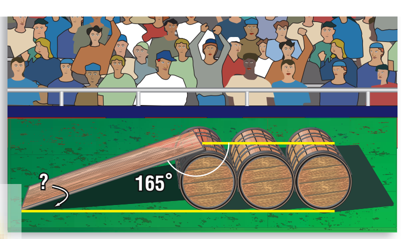
(5 $m\widehat{QTS}$



(6 $m\widehat{LP}$



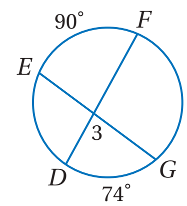
(7 **ألعاب بهلوانية :** ثُبّت سطح مائل على البرميل الأول من مجموعة براميل رُبطت مع بعضها؛ ليقدم عليها لاعب السيرك عروضه المثيرة على دراجة نارية. ما قياس الزاوية التي يصنعها السطح المائل مع الأرض؟



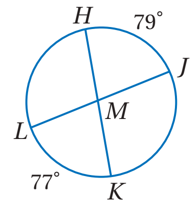
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

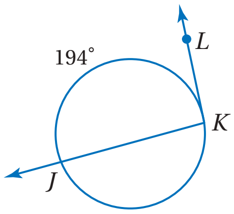
8) $m\angle 3$



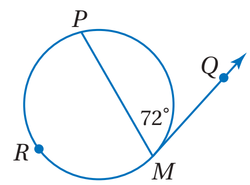
9) $m\angle JMK$



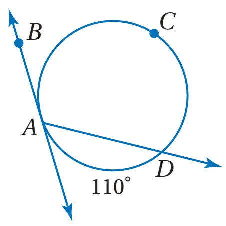
10) $m\angle K$



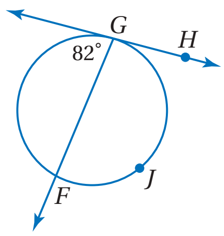
11) $m\widehat{PM}$



12) $m\angle DAB$



13) $m\widehat{GJF}$

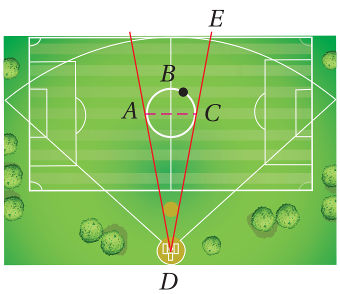


14) **رياضة:** يُمثّل الشكل المجاور ملعبًا رياضيًّا متعدّد الأغراض،

إذا كان: $m\widehat{ABC} = 200°$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

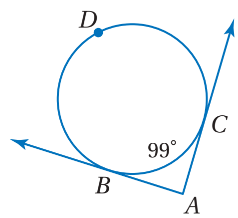
a) $m\angle ACE$

b) $m\angle ADC$

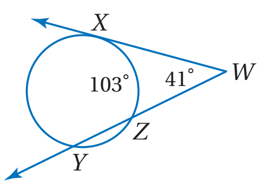


المثالان 3, 4 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

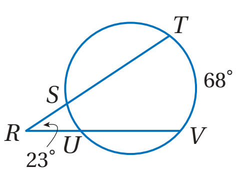
15) $m\angle A$



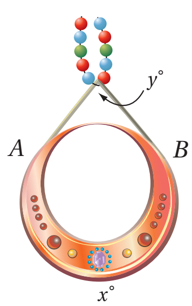
16) $m\widehat{XY}$



17) $m\widehat{SU}$



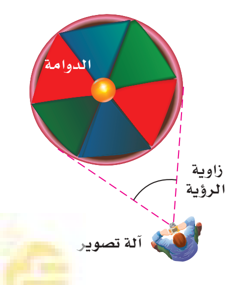
18) **مجوهرات:** يظهر في الشكل المجاور جزء من قلادة،
A و B نقطتا تماسٍّ فيها، إذا كانت $x° = 260°$ ،
فأوجد قيمة $y°$؟



19) **تصوير:** استعدّ مصوِّر لالتقاط صورة بآلة التصوير للعبة الدوّامة الدائرية، بحيث كان خطّا النظر مماسين لها، كما في الشكل المجاور .

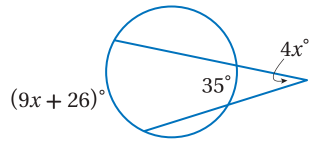
a) إذا كانت زاوية الرؤية لآلة التصوير تساوي °35، فما قياس قوس الدوّامة الذي سيظهر في الصورة؟

b) إذا أردت التقاط صورة لقوسٍ قياسه °150، فما قياس زاوية الرؤية التي يجب استعمالها؟

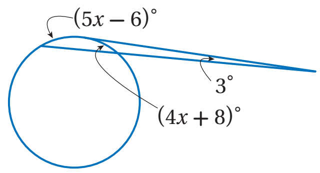


جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

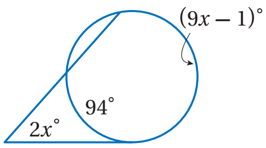
20)



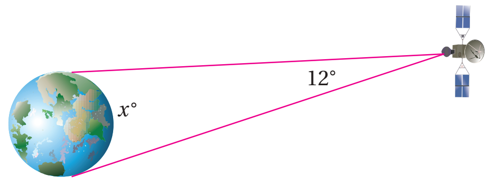
21)

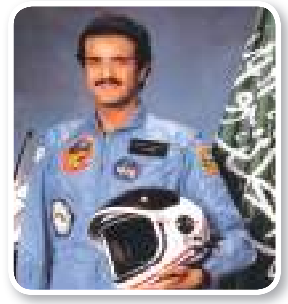


22)



23) **فضاء:** يدور قمر اصطناعي في مدار فوق خط الاستواء، أوجد قيمة x° ، وهي قياس القوس المرئي من الأرض بالنسبة للقمر الاصطناعي.





الربط مع الحياة

أول رائد فضاء سعودي هو صاحب السمو الملكي الأمير سلطان بن سلمان ابن عبدالعزيز على متن مكوك الفضاء (ديسكفري) رحلة رقم STS–51G في 29 من رمضان 1405هـ الموافق 17 يونيو 1985م.

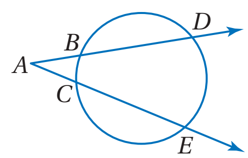
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلّ حالة من حالات النظرية 4.14

(إرشاد: ارسم وترًا يصل نقطتي تقاطع القاطعان أو القاطع والمماس أو المماسان مع الدائرة).

24) حالة 1

المعطيات: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة

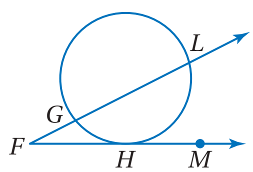
المطلوب: $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



25) حالة 2

المعطيات: $\overrightarrow{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها

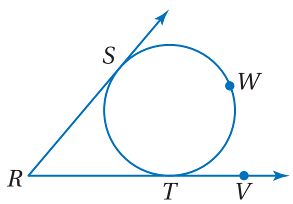
المطلوب: $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$



26) حالة 3

المعطيات: $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة

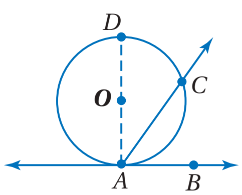
المطلوب: $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 4.13

a) **المعطيات:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot O$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ قاطع لـ $\odot O$

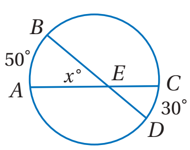
المطلوب: إثبات أن $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$.



b) برهن نظرية 4.13 إذا كانت الزاوية في فرع (a) زاويةً منفرجةً.

28) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستكشف العلاقة بين النظريتين 8.12, 8.6 ،

a) **هندسيًا:** انقل الشكل المجاور إلى دفترك. ثم ارسم ثلاثة أشكال متتالية بحيث يتحرّك موقع D مقتربًا من C، مع بقاء C, A, B ثابتة في مواقعها.



b) **جدوليًا:** قدّر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍّ من الدوائر المتتالية، سجّل قياسات $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ في جدول، ثم أوجد قيمة x لكلٍّ من هذه الدوائر.

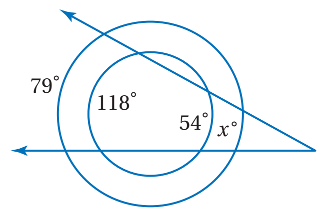
c) **لفظيًا:** صِف العلاقة بين $m\widehat{AB}$ وقيمة x° عندما يقترب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0$ ؟

d) **تحليليًا:** اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات ما توصّلت إليه في الفقرة c.

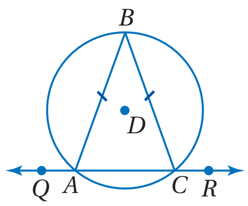
مسائل مهارات التفكير العليا

29) **اكتب:** اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع القاطع والمماس خارج الدائرة.

30) **تحدٍّ:** إذا كانت الدائرتان أدناه متحدتين في المركز، فما قيمة $x°$؟



31) **تبرير:** $\triangle ABC$ متطابق الضلعين محاط بالدائرة D، ماذا تستنتج عن $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$؟ وضّح إجابتك.

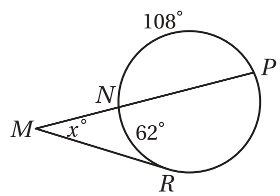


32) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرةً ومماسَّين لها متقاطعين، واستعمل المنقلة لقياس الزاوية المتكوّنة، ثم أوجد قياس كلٍّ من القوسين الأكبر والأصغر المتكوّنين. برّر إجابتك.

33) **اكتب:** رُسمت دائرة محاطة بالمثلث PQR. إذا كان: $m\angle P = 50°, m\angle Q = 60°$ ، فصف طريقة إيجاد قياس الأقواس الثلاثة الصغرى المتكوّنة من نقاط التماس.

تدريب على اختبار

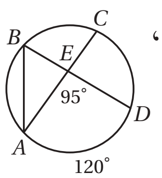
34) إذا كان:
$m\widehat{NR} = 62°$, $m\widehat{NP} = 108°$
فما قيمة x؟



A $23°$ C $64°$

B $31°$ D $128°$

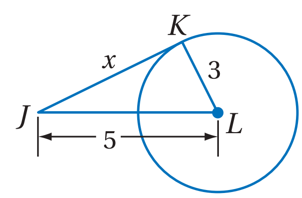
35) إذا كان: $m\angle AED = 95°, m\widehat{AD} = 120°$، فأوجد $m\angle BAC$؟



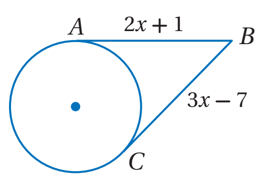
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. (الدرس 5-4)

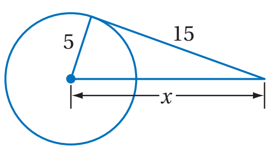
36)



37)



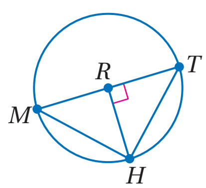
38)



39) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-4)

المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة، $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$



استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

40) $x^2 + 13x = -36$

41) $x^2 - 6x = -9$

42) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$

4-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة
Special Segments in a Circle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.

(مهارة سابقة)

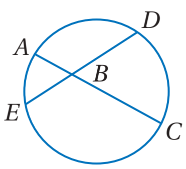
والآن:

- أجد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- أجد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

لماذا؟

قُطِّعت كعكة دائرية كبيرة طوليًّا لتكفي أكبر عدد ممكن من المدعوين إلى حفلة، ولم يبقَ منها إلا قطعة صغيرة. يمكنك إيجاد قطر الكعكة الأصلية باستعمال الخصائص الهندسية للدائرة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة: عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، ينقسم كلٌّ منهما جزأين، ففي الشكل المجاور، انقسم الوتر $\overline{AC}$ إلى $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$، وكذلك انقسم الوتر $\overline{ED}$ إلى $\overline{EB}$ و $\overline{BD}$.



تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع المستقيمة الأربع التي تكوّنت من تقاطع وترين داخل دائرة.

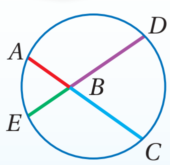
نظرية 4.15

نظرية قِطَع الوتر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولَي جزأي الوتر الثاني.

مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

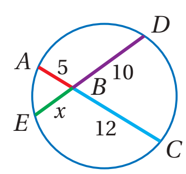


ستبرهن النظرية 4.15 في السؤال 15

مثال 1 استعمال تقاطع الوترين

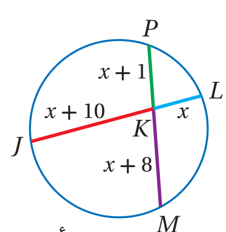
أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

(a



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 4.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب
$6 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 10

(b

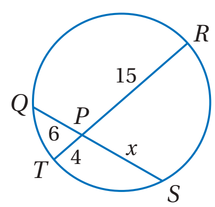


$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	النظرية 4.15
$(x+10) \cdot x = (x+1)\,(x+8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كلا الطرفين
$x = 8$	بطرح $9x$ من كلا الطرفين

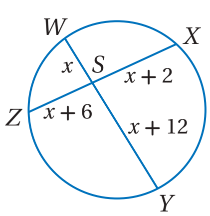
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

(1A

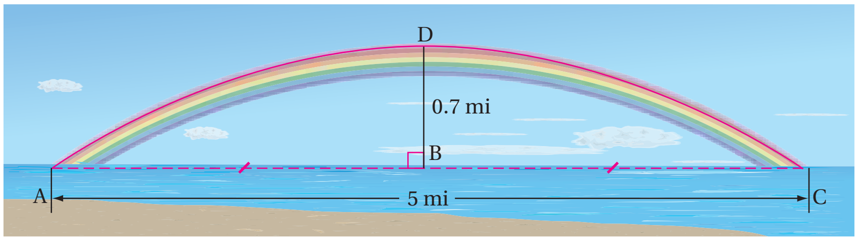


(1B



مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قياس قطع مستقيمة في الدائرة

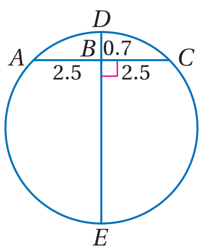
علوم: شكل قوس المطر الحقيقي دائرة كاملة، ولا يظهر لنا منها إلا القوس الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. ما نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر في الشكل أدناه؟



افهم: **المعطيات:** قوس المطر الظاهر جزء من دائرة
$\overline{AC}$ وتر في الدائرة
$\overline{DB}$ عمود منصف للوتر $\overline{AC}$

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر.

خطط: ارسم نموذجًا للمسألة، بما أن $\overline{DE}$ تُنصّف الوتر $\overline{AC}$، فإن $\overline{DE}$ قطرٌ في الدائرة. استعمل ناتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

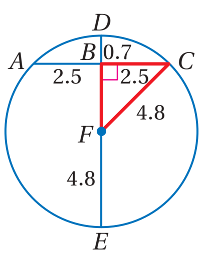


حُل:

$AB \cdot BC = DB \cdot BE$	النظرية 4.15
$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$	بالتعويض
$6.25 = 0.7BE$	بالضرب
$8.9 \approx BE$	بقسمة كلا الطرفين على 0.7
$DE = DB + BE$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$\approx 0.7 + 8.9$	بالتعويض
$= 9.6$	بالجمع

بما أن قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف قطرها يساوي $9.6 \div 2 \approx 4.8$

تحقّق: استعمل عكس نظرية فيثاغورس؛ للتحقّق من أن المثلث المتكوّن من نصف القطر وجزء من الوتر وجزءٍ من القطر في الدائرة قائم الزاوية.



$DB + BF = DF$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$0.7 + BF = 4.8$	بالتعويض
$BF = 4.1$	بطرح 0.7 من الطرفين

$BF^2 + BC^2 = CF^2$	نظرية فيثاغورس
$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$	بالتعويض
$23.06 \approx 23.04$ ✓	بالتبسيط

الربط مع الحياة

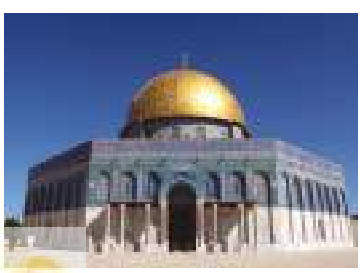
كلما كانت الشمس قريبة من الأفق، زاد الجزء الذي تراه من قوس المطر. وعند غروب الشمس، يمكنك رؤية قوس المطر على شكل نصف دائرة، بحيث تصنع أعلى نقطة في هذا القوس زاوية مقدارها 42 درجة فوق الأفق.

إرشادات لحل المسألة

ارسم شكلًا: عند حلّ المسائل اللفظية المتعلّقة بالدوائر، يُفضّل أن ترسم شكلًا وتضع عليه قياسات كل عناصر الدائرة المعطاة، وأن تسمّي القياس المجهول برمز متغير لمساعدتك على اختيار خطة الحل المناسبة.

تحقق من فهمك

2) **مصلّى قبة الصخرة:** هو أحد أهم معالم المسجد الأقصى المبارك في مدينة القدس، وتعتبر قبته من أهم وأبرز المعالم المعمارية الإسلامية، فهي عبارة عن قبة كروية قطر الدائرة التي تحتوي على القوس المار بالقمة هي 20m، ويبلغ ارتفاع أعلى نقطة فيها عن الجزء الأسطواني الذي يحملها 15m، أوجد المسافة بين طرفَي القبة؟

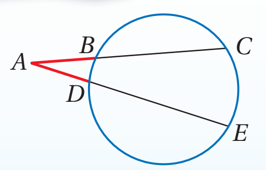


قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة: الأوتار غير المتوازية في الدائرة وغير المتقاطعة داخلها، يمكن أن تمتد لتشكّل قواطع تتقاطع خارج الدائرة.

نظرية 4.16 نظرية القاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسم قاطعان لدائرةٍ من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

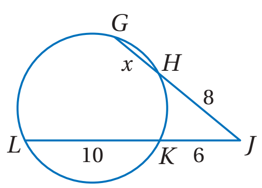


مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

ستبرهن النظرية 4.16 في السؤال 16

مثال 3 استعمال تقاطع القاطعين

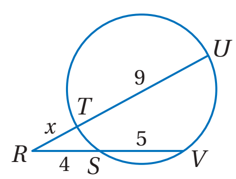
أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



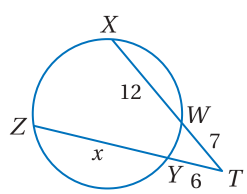
$JG \cdot JH = JL \cdot JK$	النظرية 4.16
$(x + 8)8 = (10 + 6)6$	بالتعويض
$8x + 64 = 96$	بالضرب
$8x = 32$	بطرح 64 من كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تحقق من فهمك

3A)



3B)



إرشادات للدراسة

تبسيط نص النظرية: كل طرفٍ من طرفَي المعادلة في مثال النظرية 4.16، هو ناتج ضرب طول الجزء الخارجي من القاطع في طول القاطع بكامله.

تنبيه!

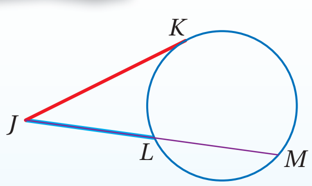
استعمال المعادلة الصحيحة: تأكّد من أنك تجد ناتج ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه. وليس في طول القطعة الداخلية منه.

يمكنك استعمال معادلة مشابهة لمعادلة النظرية 4.16 عندما يتقاطع مماس وقاطع خارج الدائرة، وفي هذه الحالة المماس أو قطعة المماس التي يقع أحد طرفيها على الدائرة تُمثّل قطعة المماس الخارجية، وقطعة المماس الكلية في آنٍ معًا.

نظرية 4.17

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسم مماسٌ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.

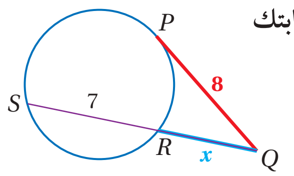


مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$

ستبرهن النظرية 4.17 في السؤال 17

مثال 4 استعمال المماس والقاطع

إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًّا للدائرة كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ.



$PQ^2 = QR \cdot QS$	النظرية 4.17
$8^2 = x(x+7)$	بالتعويض
$64 = x^2 + 7x$	بالضرب
$0 = x^2 + 7x - 64$	بطرح 64 من كلا الطرفين

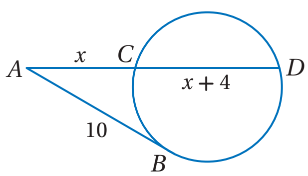
استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية؛ لأن المقدار غير قابل للتحليل.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$	$a = 1, b = 7, c = -64$
$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$	بالتبسيط
≈ -12.2 أو 5.2	باستعمال الحاسبة

وبما أنه لا يمكن أن تكون الأطوال سالبةً، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

تحقق من فهمك

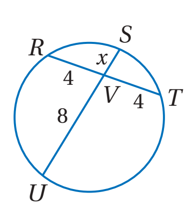
4) $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



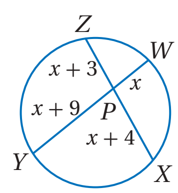
تأكد

الأمثلة 1, 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماساتٌ فعلًا.

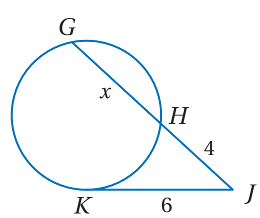
1)



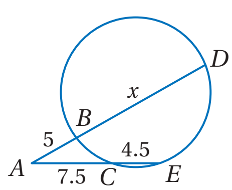
2)



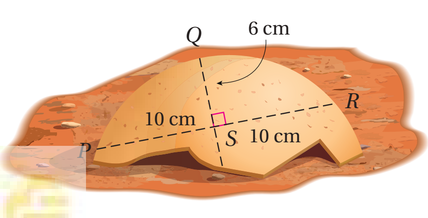
3)



4)



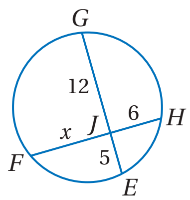
المثال 2 5) **آثار:** يبيِّن الشكل المجاور صورة جزء مكسور من إناءٍ فخاري دائري وُجِدَ في موقع أثري. إذا كانت $\overline{QS}$ جزءًا من قطر الدائرة، فما محيط الإناء الفخاري الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



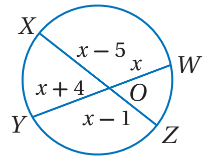
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1, 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشر.

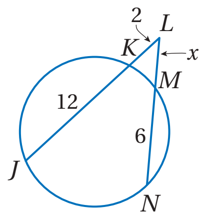
(6



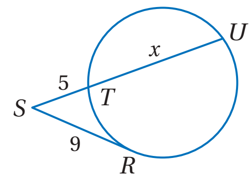
(7



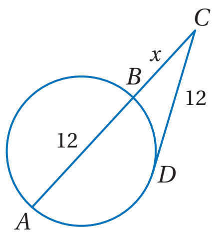
(8



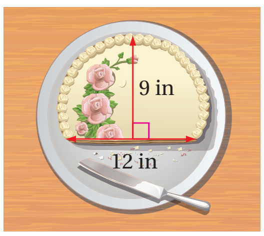
(9



(10

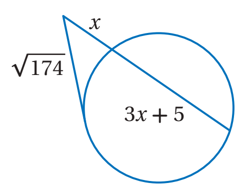


(11 **كعك:** توزّع سلْمَى الكعك في حفل. إذا كانت أبعاد القطعة المتبقية من الكعكة كما في الشكل المجاور، فما قطر الكعكة الأصلية؟

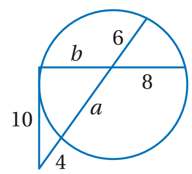


المثال 2 أوجد قيم المتغيرات في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشْر.

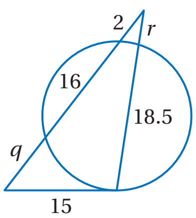
(12



(13



(14



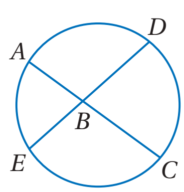
برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريات الآتية:

(إرشاد: ارسم أوتارًا تصل نقاط القطع المستقيمة المتقاطعة داخل الدائرة أو خارجها بالدائرة)

(15 برهان ذي عمودين للنظرية 4.15

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$ وتران متقاطعان في B.

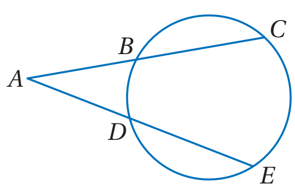
المطلوب: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



(16 برهان حرّ للنظرية 4.16

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان لدائرة.

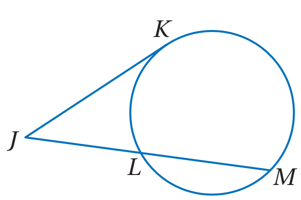
المطلوب: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



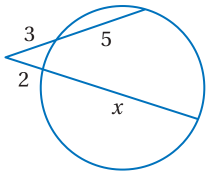
(17 برهان ذي عمودين للنظرية 4.17

المعطيات: $\overline{JK}$ مماس، $\overline{JM}$ قاطع

المطلوب: $JK^2 = JL \cdot JM$



مسائل مهارات التفكير العليا



18) **اكتشف الخطأ:** يحسب كلٌّ من خالد وعبدالعزيز قيمة x في الشكل المجاور. فكتب خالد المعادلة: $3(5) = 2x$، بينما كتب عبدالعزيز المعادلة: $3(8) = 2(2 + x)$. هل أيٌّ منهما كتب المعادلة الصحيحة؟ برّر إجابتك.

19) **تبرير:** إذا تقاطع وتران في مركز دائرة، فهل تكون قياسات الأقواس المحصورة بينهما متساوية أحيانًا، أم دائمًا، أو غير متساوية أبدًا؟

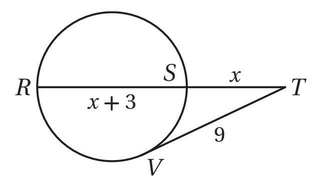
20) **اكتب:** إذا تقاطع وتران داخل الدائرة، فصِفِ العلاقة بين جزأي الأول وجزأي الثاني.

تدريب على اختبار

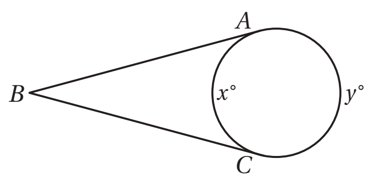
21) $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و R, S نقطتان عليها، ما قيمة x مقربةً إلى أقرب عُشر؟

A 7.6 **C** 5.7

B 6.4 **D** 4.8



22) **إجابة مطوّلة:** $\overline{BA}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة في الشكل أدناه، $m\angle ABC = 70°$.

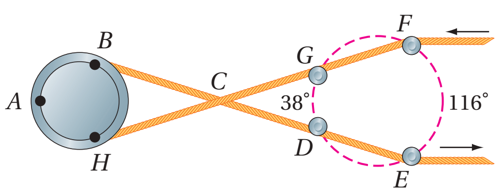


a) اكتب معادلتين تربطان بين $x°$ و $y°$.

b) أوجد قيمة كلٍّ من $x°$ و $y°$.

مراجعة تراكمية

23) **نسيج:** بعد أن تُغزل خيوط الصوف، يتم صبغها، ثم تُمرّر على مجموعة من البكرات لكي تجف، والشكل المجاور يُظهر إحدى مجموعات البكرات، لاحظ أن خيط الصوف يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند النقطة C، ولكنه في الواقع غير ذلك. أوجد $m\widehat{BH}$ مستعملاً معلومات الشكل. (الدرس 6-4)



هندسة إحداثية: مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-4)

24) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه: $K(5, -2), L(-3, -1), M(0, 5)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل.

25) الشكل الرباعي $PQRS$ الذي رؤوسه: $P(1,4), Q(-1,4), R(-2,-4), S(2,-4)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى أعلى.

استعد للدرس اللاحق

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي عُلِم ميله ومقطع y له في كلٍّ ممَّا يأتي:

26) $m: 3$، المقطع $y = -4$

27) $m = 2, (0, 8)$

28) $m = \frac{5}{8}, (0, -6)$

29) $m: \frac{2}{9}$، المقطع $y = \frac{1}{3}$

30) $m = -1, b: -3$

31) $m = -\frac{1}{12}, b: 1$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

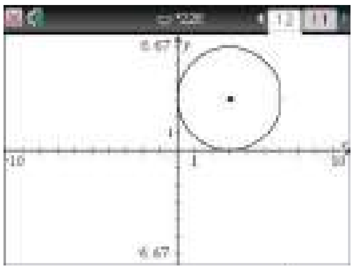
استكشاف

4-8

معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة
Equation of Circle

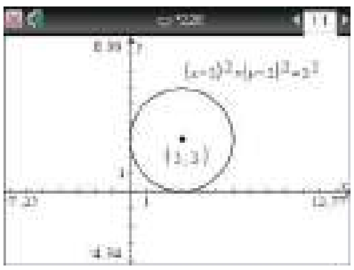
يمكنك استعمال TI–nspire لاستكشاف معادلة الدائرة.

نشاط رسم دائرة في المستوى الإحداثي



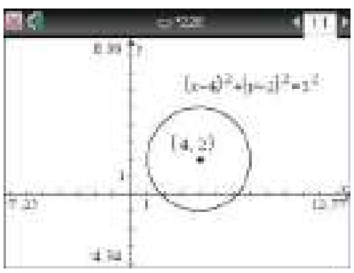
الخطوة 1: ارسم دائرة.

- افتح صفحة تطبيق الرسوم البيانية بالضغط على المفاتيح esc on :
- ارسم دائرة بالضغط على مفتاح menu ثم اختار 8: الهندسة ومنها 2: الأشكال الهندسية واختر 1: الدائرة ، ثم ضع المؤشر في أي مكان خالٍ لا يقع على أي من المحورين واضغط لرسم نقطة المركز، ومن ثم اسحب لرسم الدائرة ثم اضغط enter ثم esc .



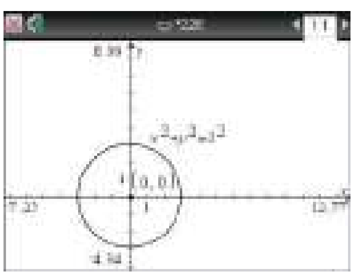
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة.

- لعرض معادلة الدائرة، اضغط على المفتاح menu ، ثم اختر 1: الإجراءات ومنها 6: الإحداثيات والمعادلات ، ثم الضغط على محيط الدائرة لتظهر المعادلة، قم بوضع المؤشر في مكان مناسب لكتابة المعادلة فيه، ثم اضغط enter .
- بالمثل اضغط على مركز الدائرة، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لكتابة إحداثيَّ مركز الدائرة واضغط enter ثم esc .



الخطوة 3: غيّر معادلة الدائرة.

- استعمل المؤشّر واضغط على مركز الدائرة وحرّك المركز ثم لاحظ كيف تتغير معادلة الدائرة. أو ظلل إحداثيَّ مركز الدائرة واكتب إحداثيَّي آخرين لمركز دائرة آخرى ولاحظ كيف يتغير موقع الدائرة ومعادلتها.
- استعمل الأسهم لسحب الدائرة من نقطة المركز ونقلها للمكان الذي تريد، ثم اضغط enter .



الخطوة 4: ارسم دائرة مركزها نقطة الأصل.

- حرّك الدائرة كما فعلت في الخطوة 3، وضع مركزها عند نقطة الأصل، أو استعمل المؤشر واضغط على محيط الدائرة وفي الوقت نفسه اضغط على الأسهم ثم اطلق المؤشر واستعمل الأسهم لتكبير الدائرة أو تصغيرها ثم اضغط enter ولاحظ أثر ذلك في معادلة الدائرة.

تحليل النتائج:

1) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عند تحريك مركزها؟

2) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عندما يزيد نصف قطرها أو ينقص؟

3) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل، ونصف قطرها 4؟ فسِّر إجابتك.

4) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (h, k)، ونصف قطرها r ؟ فسِّر إجابتك.

4-8 معادلة الدائرة
Equation of Circle

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست كتابة معادلة المستقيم وتمثيله بيانيًا في المستوى الإحداثي.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب معادلة الدائرة.
- أمثِّل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.

المفردات:

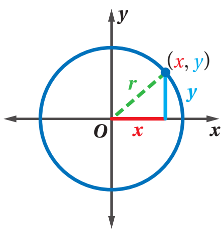
الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

standard form of an equarion of a circle

لماذا؟

تستعمل أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات الراديو لبثِّ مكالمات الهواتف النقالة. ويغطي كل برج منطقةً دائريةً. وتُصمَّم الأبراج بحيث تلتقط إشارات البث في أي مكان ضمن منطقة التغطية.

معادلة الدائرة: بما أن نقاط الدائرة جميعها تبعد مسافات متساوية عن مركزها، فإنه يمكنك إيجاد معادلتها باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو نظرية فيثاغورس.



إذا مثّل (x, y) نقطة على دائرة مركزها عند نقطة الأصل كما في الشكل المجاور، فإنه يمكنك أن تستعمل نظرية فيثاغورس؛ لتجد أن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

وإذا لم يقع مركز الدائرة عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة (h, k) كما في الشكل المبيّن في المفهوم الأساسي أدناه، فإنه يمكنك أن تستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحصل على معادلة الدائرة.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$	$d = r, (x_1, y_1) = (h, k)$، $(x_2, y_2) = (x, y)$
$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$	بتربيع كلا الطرفين

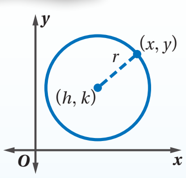
مفهوم أساسي — الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

أضف إلى مطويتك

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ،

وطول نصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة تُسمّى أيضًا صيغة المركز ونصف القطر.



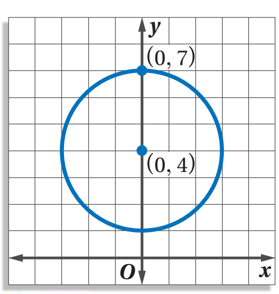
مثال 1 — كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز ونصف القطر

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) مركزها عند $(1, -8)$ ، وطول نصف قطرها 7

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$	$(h, k) = (1, -8)$، $r = 7$
$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$	بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور.



مركز الدائرة عند $(0, 4)$ وطول نصف قطرها 3

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$	$(h, k) = (0, 4)$، $r = 3$
$x^2 + (y - 4)^2 = 9$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة: في المثال 1. لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت على الصورة القياسية، إذ ليس من الضروري فك التربيع.

تحقق من فهمك

1A) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $\sqrt{10}$.   **1B)** مركزها النقطة $(4, -1)$، وقطرها 8

مثال 2 كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) مركزها $(-2, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

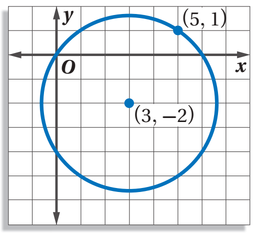
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h = -2, k = 4, r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2, k = 4, r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًّا جانبًا.



الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(5 - 3)^2 + [1 - (-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{13}$ بالتبسيط

الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = (\sqrt{13})^2$ $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

2A) مركزها $(5, 4)$، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$.

2B) مركزها $(-3, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 0)$.

إرشادات للدراسة

صيغة الجذور: في المثال 2b، من الأفضل ترك نصف القطر على صورة الجذر؛ لأن نصف القطر سيُربع عند كتابة معادلة الدائرة.

تمثيل الدوائر بيانيًّا: يمكنك تحليل معادلة الدائرة؛ لتجد معلوماتٍ تساعدك على تمثيلها بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

مثال 3 تمثيل الدائرة بيانيًّا

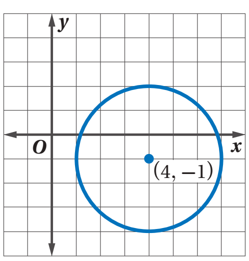
أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$، ثم مثّلها بيانيًّا.

أعد كتابة المعادلة: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ بالصيغة القياسية لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



لذا فإن: $h = 4, k = -1, r = 3$. أي أن المركز عند النقطة $(4, -1)$ ونصف القطر 3 وحداتٍ.

تحقق من فهمك

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

3A) $x^2 + y^2 = 4$ **3B)** $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس: لقد درست ثلاثًا من مسلّمات إقليدس في درس 5−2، وهناك مسلّمة أخرى لإقليدس، وهي أنه يمكنك رسم دائرة وحيدة بنصف قطر معلوم باختيار أي نقطة لتكون مركزًا لهذه الدائرة.

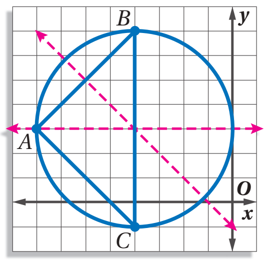
مثال 4 من واقع الحياة — استعمال ثلاث نقاط لكتابة معادلة الدائرة

أعاصير: وُضعت ثلاث صفارات للتحذير من الأعاصير في ثلاثة مواقع استراتيجية على دائرة حول مدينة، اكتب معادلة الدائرة التي وُضعت عليها الصفارات الثلاث إذا كانت إحداثيات مواقعها هي: $A(-8, 3)$, $B(-4, 7)$, $C(-4, -1)$.

افهم: **المعطيات:** إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة هي:
$A(-8 , 3)$, $B(-4 , 7)$, $C(-4 , -1)$

المطلوب: كتابة معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث.

خطط: مثِّل $\triangle ABC$ بيانيًا، ثم أنشئ عمودين منصّفين لاثنين من أضلاعه؛ لتعيين مركز الدائرة، حيث إن العمود المنصف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها، وأوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم استعمل المركز ونصف القطر لكتابة معادلتها.



حُلّ: أنشئ عمودين منصفين لضلعين، يظهر من الرسم أن مركز الدائرة يقع عند النقطة $(-4, 3)$، ونصف القطر 4

اكتب المعادلة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$
$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

تحقّق: ارسم دائرة مركزها $(-4 , 3)$ ونصف قطرها 4، ثم تحقق من أنها تمرّ بالنقاط الثلاث المعطاة.

تحقق من فهمك

4) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: $R(1, 2)$, $S(-3, 4)$, $T(-5, 0)$.

الربط مع الحياة

في الولايات المتحدة يُسجَّل 1000 إعصار تقريبًا خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميرًا هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h، أو أكثر، فقد يصل عرض مسارها التدميري إلى ميل، ويمتد إلى 50 mi .

تأكد

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

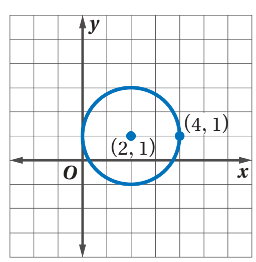
1) مركزها $(9, 0)$، ونصف قطرها 5

2) مركزها $(3, 1)$، وقطرها 14

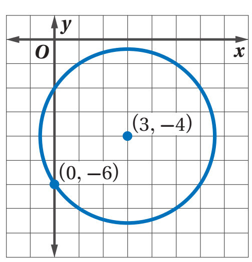
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$.

4) مركزها $(-5, 3)$ ، وتمر بالنقطة $(1, -4)$.

5)



6)



المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا.

7) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

8) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

9) $(x + 3)^2 + y^2 - 9 = 0$

المثال 4

10) **اتصالات:** مُثّلت ثلاثة أبراج هواتف نقالة بالنقاط: $X(6, 0)$, $Y(8, 4)$, $Z(3, 9)$، عيّن موقع برج آخر يبعد مسافات متساوية عن هذه الأبراج الثلاثة، ثم اكتب معادلة الدائرة التي تقع عليها الأبراج الثلاثة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 **اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:**

(11 مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 4

(12 مركزها $(6, 1)$، ونصف قطرها 7

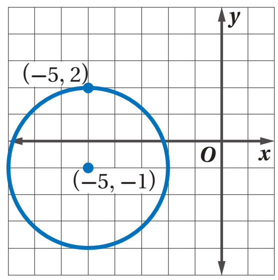
(13 مركزها $(-2, 0)$، ونصف قطرها 16

(14 مركزها $(8, -9)$، ونصف قطرها $\sqrt{11}$

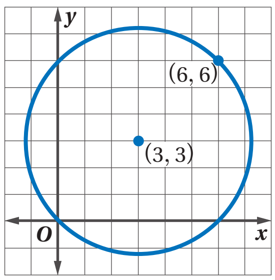
(15 مركزها $(-3, 6)$، وتمُرّ بالنقطة $(0, 6)$.

(16 طرفا قطرٍ فيها $(0, 4)$ و $(6, -4)$.

(17



(18



(19 **طقس:** أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها إعصار. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل، والحلقة الأولى تبعد 15 mi عن المركز، والمسافة بين كل حلقتين متتاليتين 15 mi، فما معادلة الحلقة الثالثة؟

المثال 3 **أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا.**

(20 $x^2 + y^2 = 36$

(21 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

(22 $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

(23 $(x - 8)^2 + y^2 = 64$

المثال 4 **اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا.**

(24 $A(1, 6), B(5, 6), C(5, 0)$

(25 $F(3, -3), G(3, 1), H(7, 1)$

(26 **صواريخ:** اختلاف حجم محرك الصاروخ، يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ، كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ.

a) اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300 ft، مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000 ft؟

(27 **إذاعة:** تبثّ إذاعةٌ محليةٌ برامجها، فتغطي منطقةً لايزيد بعدها عن برج البث أكبر من 60 km، إذا كان البرج يقع على بعد 40 km غربًا و 50 km شرقًا من منزل خالد.

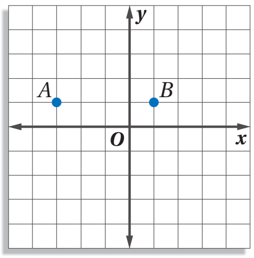
a) إذا كان منزل خالد عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فاكتب المعادلة التي تُمثّل الموقف ومثّلها بيانيًّا.

b) ماذا يُمثّل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يلتقط خالد البث من البرج الإذاعي؟ اشرح إجابتك.

(28 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$.

(29 اكتب معادلة الدائرة التي قطرها 12، ويقع مركزها في الربع الثاني، وتمسُّ كلًّا من المستقيمين $y = -4, x = 1$.

30) **تمثيلات متعددة:** في هذا السؤال ستستقصي المحل الهندسي المركّب لنقطتين، وهو المحل الهندسي الذي يُحقّق أكثر من شرطٍ مختلفٍ.



a) **جدوليًا:** اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاطٍ في المستوى تبعد مسافات متساوية عن كلٍّ من A و B.

b) **بيانيًا:** مثّل المحل الهندسي لهذه النقاط بيانيًّا.

c) **لفظيًا:** صِفِ المحل الهندسي للنقاط جميعها التي تبعد مسافات متساوية عن زوج من النقاط.

d) **بيانيًا:** استعملِ التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحدد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعُد مسافة AB عن النقطة B، ومثِّله بيانيًّا.

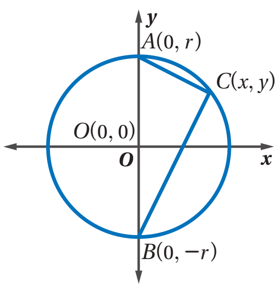
e) **لفظيًا:** صِفِ المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صِفِ المحل الهندسي المركب لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A و B، وتبعد مسافة AB عن B. واذكر ماذا يمثل بيانيًّا؟

إرشادات للاختبار

استعمال الصيغ:
تذكّر أنه إذا كان السؤال يوظّف المستوى الإحداثي، فاستعمل صيغتي المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف وكذلك صيغة الميل لحل السؤال، وللتأكد من صحة حلّك.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة كما في الشكل المجاور، فإنها قائمة.



32) **تبرير:** معادلة دائرة هي: $(x-5)^2+(y+7)^2=16$.
إذا أُجريت إزاحة لمركزها بمقدار 3 وحداتٍ إلى اليمين و9 وحداتٍ إلى أعلى، فما معادلة الدائرة الجديدة؟ برِّر إجابتك.

33) **مسألة مفتوحة:** عيّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامةٍ واحدةٍ، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشِئ الدائرة التي تحيط به.

34) **اكتب:** اشرح العلاقة بين صيغة المسافة بين نقطتين ومعادلة الدائرة.

تدريب على اختبار

35) أيُّ المعادلات الآتية تُمثّل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$، وتمر بالنقطة $(2, 8)$؟

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$

B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$

C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$

D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

36) إذا كان نصف قطر $\odot F$ يساوي 4، وإحداثيًّا مركزها هما $(-4, 0)$، فأي النقاط الآتية تقع على $\odot F$؟

A $(4, 0)$

B $(0, 4)$

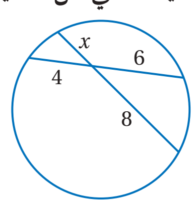
C $(4, 3)$

D $(-4, 4)$

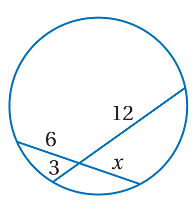
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 7-4)

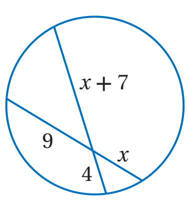
37)



38)



39)



الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 4-1)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية
(الدروس 4-2 إلى 4-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي $360°$
- طول القوس يتناسب تناسبًا طرديًّا مع محيط الدائرة.
- قطر الدائرة العمودي على وترٍ فيها، ينصفه وينصف القوسين المقابلين لهذا الوتر.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله.

المماس والقاطع وقياسات الزوايا
(الدرسان 4-6 ,4-5)

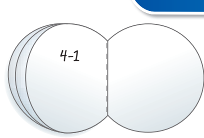
- يقطع المماس الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ بالضبط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.
- مماسَّا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.
- قياس الزاوية المتكوّنة من تلاقي قاطعين خارج الدائرة، يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.
- قياس الزاوية المتكوّنة من قاطعٍ ومماسٍّ يساوي نصف قياس القوس المقابل لهذه الزاوية.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة
(الدرسان 4-8 ,4-7)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال حاصل ضرب أطوال أجزاء هذه الأوتار.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



مفردات أساسية

الدائرة (ص. 178)
المركز (ص. 178)
نصف القطر (ص. 178)
الوتر (ص. 178)
القطر (ص. 178)
الدوائر المتطابقة (ص. 179)
الدائرتان المتحدتان في المركز (ص. 179)
محيط الدائرة (ص. 180)
باي (π) (ص. 180)
المضلع المحاط بدائرة (ص. 181)
الدائرة الخارجية (ص. 181)
الزاوية المركزية (ص. 186)
القوس (ص. 186)
القوس الأصغر (ص. 187)
القوس الأكبر (ص. 187)
نصف دائرة (ص. 187)
الأقواس المتطابقة (ص. 187)
الأقواس المتجاورة (ص. 188)
طول القوس (ص. 189)
الزاوية المحيطية (ص. 201)
القوس المقابل (ص. 201)
المماس (ص. 209)
نقطة التماس (ص. 209)
المماس المشترك (ص. 209)
القاطع (ص. 216)

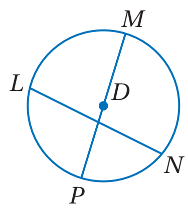
اختبار المفردات

بين ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فضع كلمة من القائمة أعلاه مكان الكلمة التي تحتها خط؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) أيُّ قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة فهي نصف قطر للدائرة.
2) الوتر المارُّ بمركز الدائرة هو قطر فيها.
3) يقع رأس الزاوية المركزية عند مركز الدائرة، ويحتوي ضلعاها على نصفَي قطرين للدائرة.
4) القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوس أكبر.
5) القوس المقابل للزاوية المحيطية هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعَي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها.
6) النقطة الوحيدة التي يتقاطع فيها مستقيمٌ مع دائرةٍ في المستوى نفسه هي المماس المشترك.
7) القاطع هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط.
8) تكون الدائرتان متحدتين في المركز، إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

4-1 الدائرة ومحيطها (ص 178–185)

استعمل الدائرة في الشكل أدناه للإجابة عن الأسئلة 11–9:



9) سمِّ الدائرة.

10) سمِّ نصف قطر للدائرة.

11) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا.

أوجد القطر ونصف القطر للدائرة المُعطى محيطها في كلٍّ ممّا يأتي، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

12) $C = 43$ cm

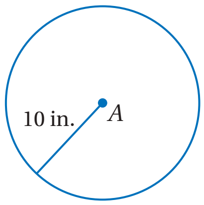
13) $C = 26.7$ yd

14) $C = 108.5$ ft

15) $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$.



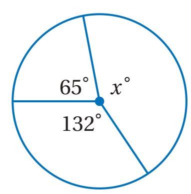
$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(10)$	بالتعويض
≈ 62.83	باستعمال الحاسبة

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

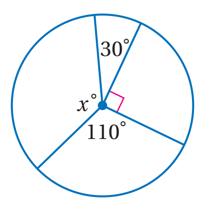
4-2 قياس الزوايا والأقواس (ص 186–193)

أوجد قيمة $x°$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

16)

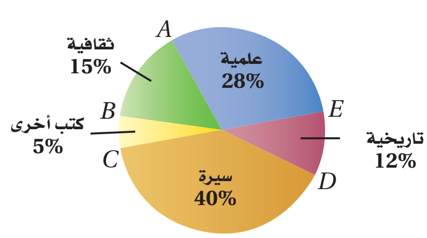


17)



18) **كتب:** أجرى مُعلم مسحًا حول الكتب التي يفضّل طلابه قراءتها، ومثّل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية كما في الشكل أدناه، أجب عمّا يأتي:

الكتب التي يُفضّلها الطلاب



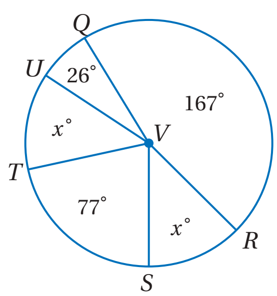
a) أوجد $m\widehat{AE}$

b) أوجد $m\widehat{BC}$

c) صِفْ قوس القطاع الدائري الذي يمثّل فئة السيرة.

مثال 2

أوجد قيمة $x°$ في الشكل الآتي:

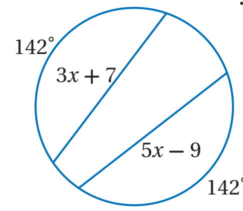


$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$167° + x° + 77° + x° + 26° = 360°$	بالتعويض
$270° + 2x° = 360°$	بالتبسيط
$2x° = 90°$	بالطرح
$x° = 45°$	بالقسمة

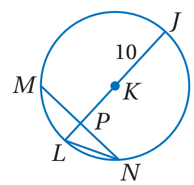
دليل الدراسة والمراجعة

4-3 الأقواس والأوتار (ص 194–200)

19) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

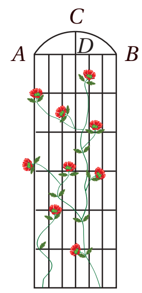


في $\odot K$، إذا كان: $MN = 16, m\widehat{MLN} = 98°$ ، فأوجد كلّ قياس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة.



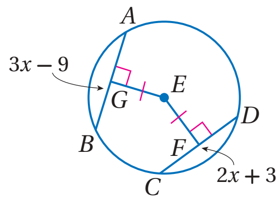
20) $m\widehat{NJ}$ **21)** LN

22) **بَسْتَنة:** يُبيّن الشكل عريشًا يعلوه قوس من دائرة، إذا كان $\overline{CD}$ جزءًا من قطرها و $m\ \widehat{AB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملةً، فأوجد $m\widehat{CB}$.



مثال 3

جبر: في $\odot E$، إذا كان $EG = EF$ ، فأوجد AB .



الوتران $\overline{EG}, \overline{EF}$ متطابقان، لأن بُعدَيهما عن E متساويان.

إذن:

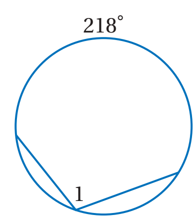
$AB = CD$	النظرية 4.5
$3x - 9 = 2x + 3$	بالتعويض
$3x = 2x + 12$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$x = 12$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

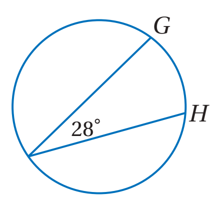
إذن: $AB = 3(12) - 9 = 27$.

4-4 الزوايا المحيطية (ص 201–207)

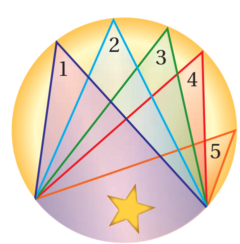
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

23) $m\angle 1$ **24)** $m\widehat{GH}$



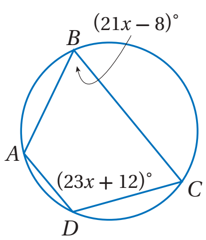


25) **شعارات:** إذا كان $m\angle 1 = 42°$ في الشعار المجاور، فأوجد $m\angle 5$.



مثال 4

أوجد $m\angle D$ و $m\angle B$.



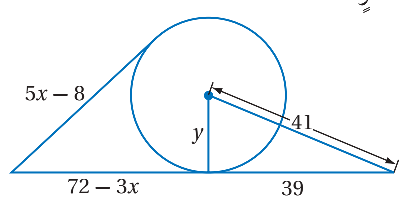
بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، إذن الزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

$m\angle D + m\angle B = 180°$	تعريف الزوايا المتكاملة
$(23x + 12)° + (21x - 8)° = 180°$	بالتعويض
$(44x + 4)° = 180°$	بالتبسيط
$44x = 176$	بالطرح
$x = 4$	بالقسمة

إذن: $m\angle D = (23(4) + 12)° = 104°$ و $m\angle B = (21(4) - 8)° = 76°$.

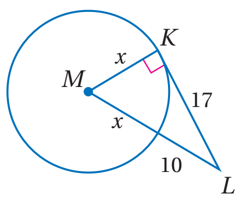
26) خيال علمي: كتب جابر قصةً قصيرةً، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوريَّ بين كوكب معيّن ثنائي الأبعاد وقمره، يكون ممكنًا إذا كان مسار الانتقال مماسًّا لها. ارسم المسارات الممكنة جميعها.

27) أوجد قيمة كلٍّ من x و y مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot M$ عند K كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.

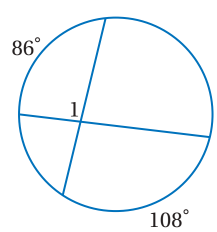


من النظرية 4.10: $\overline{MK} \perp \overline{KL}$ ؛ إذن $\triangle MKL$ مثلث قائم الزاوية.

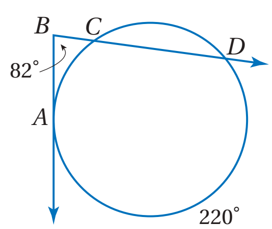
$KM^2 + KL^2 = ML^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 17^2 = (x+10)^2$	بالتعويض
$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$	بالضرب
$289 = 20x + 100$	بالتبسيط
$189 = 20x$	بالطرح
$9.45 = x$	بالقسمة

أوجد القياسين الآتيين:

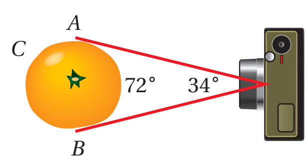
28) $m\angle 1$



29) $m\widehat{AC}$

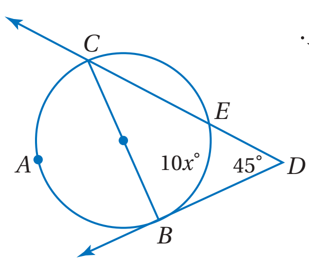


30) تصوير: أراد أحمد أن يلتقط صورةً لبرتقالة، فأخذ اللقطة كما في الشكل أدناه، حيث كان خطَّا النظر مماسين لها. إذا كان قياس زاوية الرؤية لآلة التصوير °34 ، فأوجد $m\widehat{ACB}$.



مثال 6

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



$\widehat{CAB}$ نصف دائرة؛ لأن $\overline{CB}$ قطرٌ فيها.

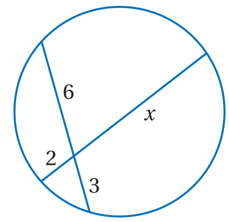
إذن: $m\widehat{CAB} = 180°$.

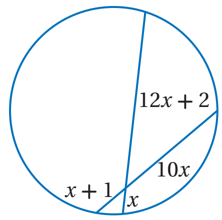
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$	النظرية 4.14
$45° = \frac{1}{2}(180 - 10x)°$	بالتعويض
$90 = 180 - 10x$	بالضرب
$-90 = -10x$	بالطرح
$9 = x$	بالقسمة

دليل الدراسة والمراجعة

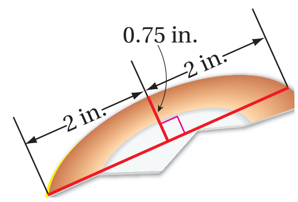
4-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة (ص 229–224)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(31


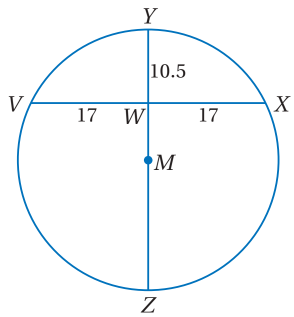
(32


(33 **آثار:** وجد حمزة جزءًا من طبقٍ أثريٍّ مكسورٍ في أثناء حَفره حفرةً لزراعة شجرة. ما محيط الطبق الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



مثال 7

أوجد قطر الدائرة M.



$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$	النظرية 4.15
$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$	بالتعويض
$289 = 10.5 \cdot WZ$	بالتبسيط
$27.5 \approx WZ$	بقسمة كلا الطرفين على 10.5
$YZ = YW + WZ$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$YZ = 10.5 + 27.5$	بالتعويض
$YZ = 38$	بالتبسيط

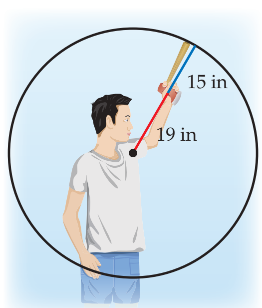
4-8 معادلة الدائرة (ص 235–231)

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

(34 مركزها $(-2, 4)$ ونصف قطرها 5

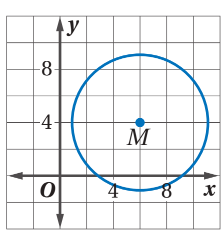
(35 مركزها $(1, 2)$ وقطرها 14

(36 **أخشاب:** يتعلم عادل في موقع تدريب خارج البيت إجراءات السلامة عند قطع الأخشاب، يتضمّن هذا التدريب تكوين دائرة بذراعه الممدودة؛ للتأكد من عدم إصابة أي شيء فوقه عندما يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد ذراعه يصل إلى 19 in وطول مقبض آلة قطع الخشب 15 in، فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة لعادل مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل؟



مثال 8

اكتب معادلة الدائرة الممثّلة بيانيًّا أدناه.



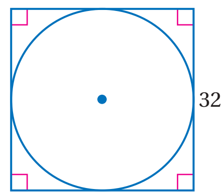
مركز الدائرة $(6, 4)$ ونصف قطرها 5

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$	$r = 5, (h, k) = (6, 4)$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$	بالتبسيط

اختبار الفصل

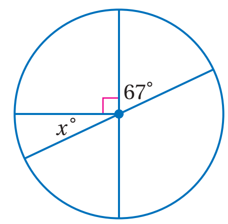
1) **برك سباحة:** عمق بركة سباحة سطحها دائري الشكل 4 ft، وطول قطر سطحها 25 ft، أوجد محيط سطح هذه البركة مقربًا إلى أقرب قدمٍ؟

2) أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة الآتية:

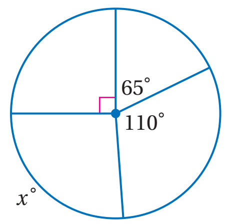


أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

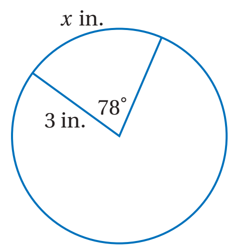
3)



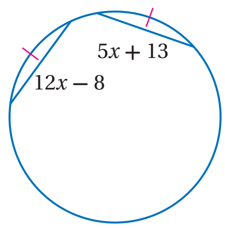
4)



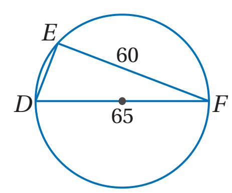
5)



6)



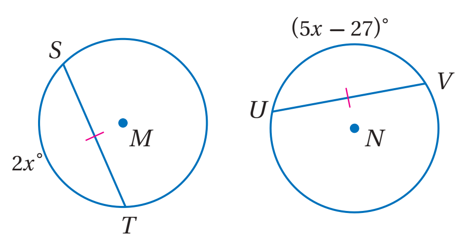
7) **اختيار من متعدد:** ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟



A 5   C 25

B 15   D 88.5

8) إذا كانت $\odot N \cong \odot M$، فأوجد قيمة x.

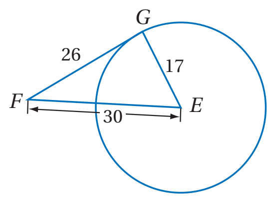


9) **اختيار من متعدّد:** ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحدتين في المركز؟

A 0   C 2

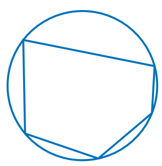
B 1   D 3

10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًّا لـ $\odot E$. برّر إجابتك.

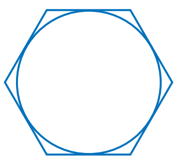


11) **اختيار من متعدد:** أيُّ الأشكال أدناه يُمثّل دائرة تحيط بمضلع؟

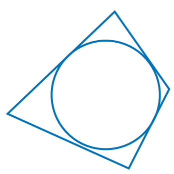
A



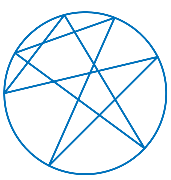
C



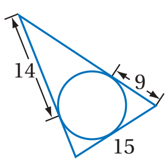
B



D

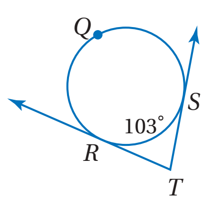


12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

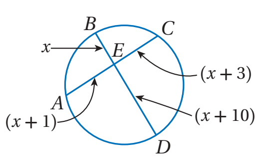


أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

13) $m\angle T$



14) x



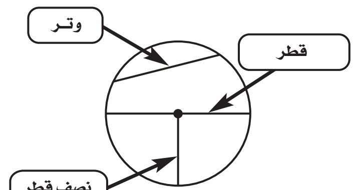
15) **أزهار:** أرادت هند أن تحوّط جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت هند أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل الحد الخارجي لحوض الأزهار؟

الفصل 4 الإعداد للاختبارات

خصائص الدائرة

الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة خصائص وعلاقات خاصة.

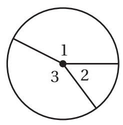
ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



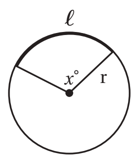
$r = \frac{1}{2}d$

$d = 2r$

$C = 2\pi r$ أو πd



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$



$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمّن العناصر الأساسية: **نصف القطر والقطر والوتر والقوس والمماس والقاطع.**
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة إلى العلاقة بين عناصر الدائرة.

الخطوة 2

اقرأ نص المسألة، وادرس أيَّ شكلٍ مُعطًى بدقةٍ وعنايةٍ.

- حدّد المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمّنها المسألة، وأيّ معلومات أخرى يمكن أن تُحدّدها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

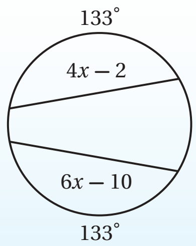
حُلّ المسألة، ثم تحقّق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخصائص لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك، وتأكّد من كونها مقبولة ومنطقية.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدّد المطلوب فيها ، ثم استعمل المعطيات لحلّها.

أوجد قيمة x في الشكل المجاور:



A 2   **C** 4

B 3   **D** 6

اقرأ المسألة وادرس الشكل جيدًا. أعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين. يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. يمكنك استعمال هذه الخاصية لتكوين معادلة بدلالة x، ومن ثم حلّها.

$4x - 2 = 6x - 10$ تعريف القطع المتطابقة

$4x - 6x = -10 + 2$ بالطرح

$-2x = -8$ بالتبسيط

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$ بقسمة كلا الطرفين على -2

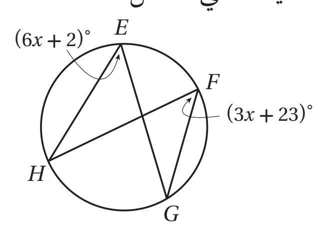
$x = 4$ بالتبسيط

إذن قيمة x تساوي 4، فالإجابة هي C، تحقّق من إجابتك بتعويض 4 في كلٍّ من عبارتَي الوترين، ستجد أن طولَي الوترين متساويان.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤالٍ ممّا يأتي. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة.

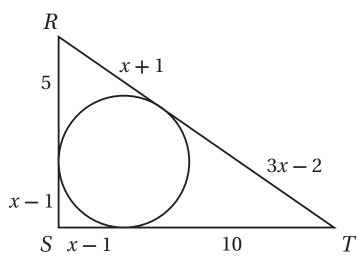
1) أوجد قيمة x في الشكل أدناه:



A 4   **C** 6

B 5   **D** 7

2) يُحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه، ما محيط هذا المثلث؟



A 33 وحدةً   **C** 37 وحدةً

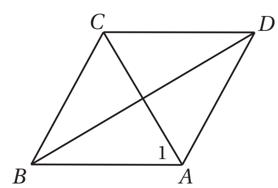
B 36 وحدةً   **D** 40 وحدةً

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة.

1) إذا كان $ABCD$ معينًا، وكان $m\angle ABC = 70°$ ، فأوجد $m\angle 1$؟



A $45°$ **C** $70°$

B $55°$ **D** $125°$

2) يقول محمد: "إذا كنت تقيم في جدة، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية"، أيّ الافتراضات الآتية تبدأ به برهانًا غير مباشر لهذه العبارة؟

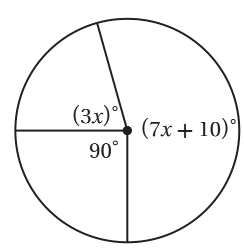
A افترض أن شخصًا لا يقيم في جدة.

B افترض أن شخصًا لا يقيم في المملكة العربية السعودية.

C افترض أن شخصًا لا يقيم في المملكة العربية السعودية، ولا يقيم في جدة.

D افترض أن شخصًا يقيم في السعودية، ويقيم في جدة.

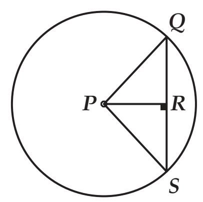
3) أوجد قيمة x في الشكل أدناه:



A 19 **C** 26

B 23 **D** 28

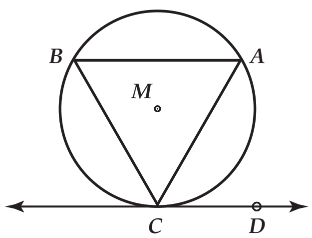
4) نصف قطر $\odot P$ في الشكل أدناه يساوي 5 ، إذا كان $PR = 3$، فما طول $\overline{QS}$ ؟



A 4 **C** 8

B 5 **D** 10

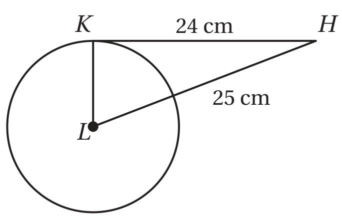
5) في $\odot M$ ، إذا كان: $\widehat{CA} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{AB}$ ، وكان $\overleftrightarrow{CD}$ مماسًّا لـ$\odot M$ عند النقطة C كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACD$ ؟



A $30°$ **C** $90°$

B $60°$ **D** $120°$

6) إذا كانت $\overline{HK}$ مماسًّا للدائرة L في الشكل أدناه، فأوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot L$.



A 7π cm **C** 43.96 cm

B 14π cm **D** 20π cm

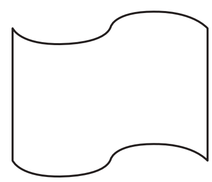
إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص الدائرة، لكتابة المعادلة وحلّها لإيجاد قيمة x.

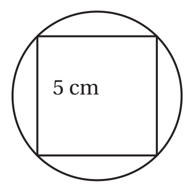
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك في ورقة الإجابة.

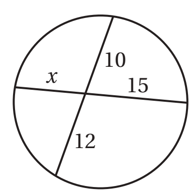
7) هل للشكل الآتي تماثل دوراني؟
وإذا كان كذلك، فأوجد رتبة هذا التماثل.



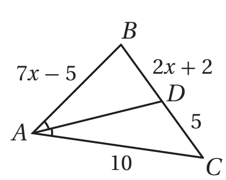
8) الشكل أدناه مربع محاط بدائرة طول ضلعه 5 cm،
ما محيط هذه الدائرة ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر سنتمتر.



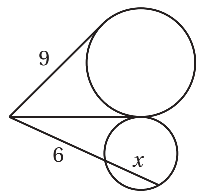
9) أوجد قيمة x في الشكل الآتي، مبيّنًا خطوات الحل.



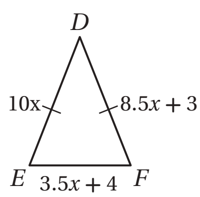
10) $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$ كما في الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



11) أوجد قيمة x في الشكل أدناه مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.



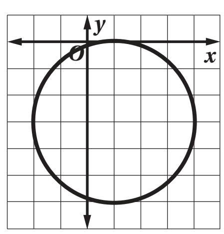
12) ما طول $\overline{EF}$ في المثلث أدناه؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

13) استعمل الدائرة في الشكل أدناه لحل الأسئلة الآتية:



a) ما مركز الدائرة؟

b) ما نصف قطر الدائرة؟

c) اكتب معادلة الدائرة.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	1-5	مهارة سابقة	4-2	4-3	4-6	4-5	3-5	4-4	4-7	2-4	4-5	مهارة سابقة	4-8

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة العربية	الرمز في المرحلة المتوسطة	الرمز في المرحلة الثانوية
الإحداثي السيني	س	x
الإحداثي الصادي	ص	y
ارتفاع	ل	h
الجذر التربيعي	$\overline{}\!\!\!\sqrt{}$	$\sqrt{}$
قياس زاوية	ق ∠ أ ب جـ	$m\angle ABC$
زاوية	∠	$\angle$
زوج مرتب	(أ ، ب)	(a, b)
قاعدة	ق	b
قطر دائرة	٢ نق	d
قطعة مستقيمة	$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طرفاها أ ، ب	$\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها A, B
محيط الدائرة	مح	C
مركز الدائرة	م	C
مساحة	م	A
مستقيم	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين أ وَ ب	$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين A, B
المسافة بين نقطتين	ف	d
نصف قطر الدائرة	نق	r
نصف مستقيم	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	$\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم يمر بالنقطة B وطرفه A
نقطة الأصل	م	o

الصيـغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a+b}{2}$ في المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	المسافة بين نقطتين	على خط الأعداد: $d = \lvert a-b \rvert$ في المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة الكلية للسطح

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$		

الرموز

a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـ
$\overset{\frown}{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ B
$\overset{\frown}{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ C
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـ
$p \wedge q$	p وَ q
$\cos$	جيب التمام
$^\circ$	درجة

$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـ

$\square$	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
s	طول ضلع من مضلع
$\sim$	مشابه
$\sin$	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
$\tan$	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل