المملكة العربية السعودية

وزارة التربية والتعليم

الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة الباحة

ثانوية السروات بالظفير (نظام المقررات)

أوراق عمل يومية لمادة الرياضيات ٥

((نظام المقررات))

معلم المادة / سعدي عبدالله ال فرحان

رياضيات ٥ ((ورق عمل)) { الوحدة الأولى }

١) الدوال :

مفهوم أساسي الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

الأعداد الحقيقية R

أولاً :كتابة المجموعات باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

مثــال : $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ تكتب بالصفة المميزة :

اكتب كلاً من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :		
$\{1,2,3,4,5,..........\}$	$x \le -3$	$-1 \le x \le 5$
....	....	....

ثانياً : كتابة المجموعات باستخدام رموز الفـــترات :

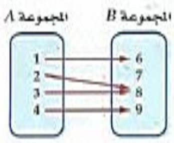
فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a,b]$	$x \ge a$	$[a,\infty)$
$a < x < b$	(a,b)	$x \le a$	....
$a \le x < b$	....	$x > a$	....
$a < x \le b$	....	$x < a$	$(-\infty,a)$
		$-\infty < x < \infty$	....

اكتب كلاً من مجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة :		
$-4 \le y < -1$	$x \ge -3$	$x < -2$ أو $x > 9$
....	....	....

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

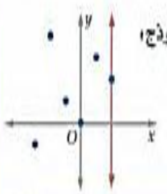
مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثلة في المخطط المجاور تمثل دالة.
حيث تمثل المجموعة A مجال الدالة.
المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى = $\{6, 8, 9\}$.



مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



في كل علاقة مما يأتي ، حدد ما إذا كانت y ثمثل دالة في x أم لا :

1) يلمحتمثل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء ، أما قيم y فتمثل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك .

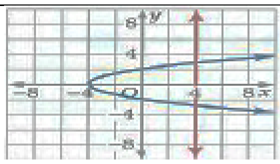
....

2)

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
9	22

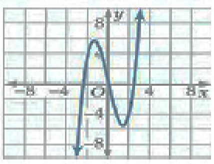
....

3)



....

4)



....

5) $3y + 6x = 18$

....

أوجد قيمة كل دالة مما يأتي عند القيم المعطاه :		
يم $f(x)=x^2+8x-24$	$f(6)=$	د $f(5c+4)=$
صيم $h(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}$	$h(12)=$	
يم $g(x)=2x^2+18x-14$	$g(9)=$	د $g(3x)=$

تحديد مجال الدالة جبرياً

مــثال / لتحديد مجال الدالة : $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2-7x}$ ننظر الى القيم التي تجعل المقدار غير معرف $\Leftarrow$ وهي إذا كان المقام يساوي صفراً ، وبحل المعادلة $x^2-7x=0$ فإن القيم المستثناة من المجال هي .... و .... وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا : ....،........ وتكتب بالصفة المميزة :

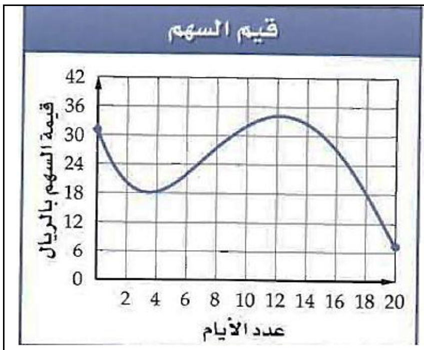
$$\{x|.............................., x\in R\}$$

حدد مجال كل من الدوال الآتية :		
$g(x)=\sqrt{t-5}$	د $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2+7x+12}$	$h(a)=\sqrt{a^2-4}$
ر $f(x)=\dfrac{8x}{\sqrt{2x+6}}$		

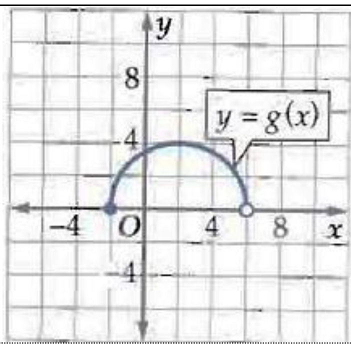
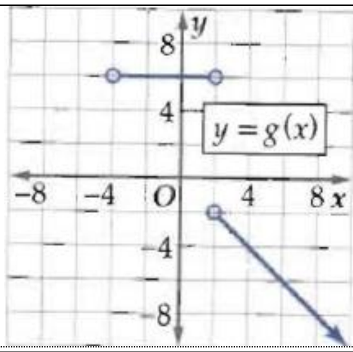
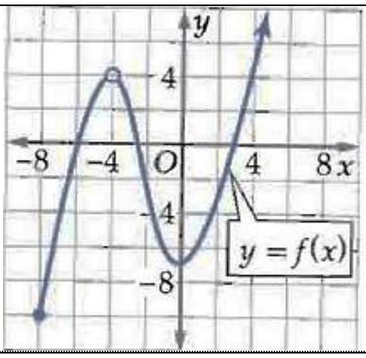
إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تعطي بالدالة متعددة التعريف الآتية ، حيث الزمن t بالثواني: $v(t)=\begin{cases} 4t & , \quad 0\le t\le 15 \\ 60 & , \quad 15<t<240 \\ -6t+1500 & , \quad 240\le t\le 250 \end{cases}$		
$v(5)=$	د $v(15)=$	$v(245)=$

٢) تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات:

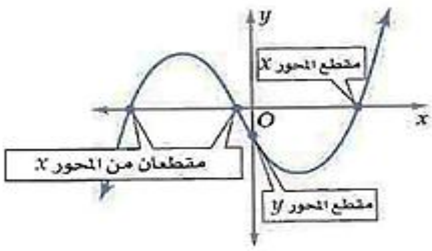
تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يوماً ، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة : $v(d)=0.002\ d^4-0.11d^3+1.77\ d^2-8.6\ d+31$ و $0\le d\le 20$ حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d	
استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر ، ثم تحقق من إجابتك جبرياً .	
استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالاً .	

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

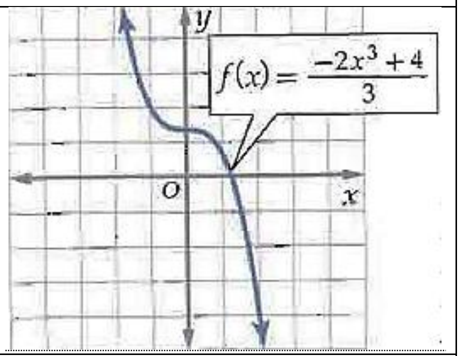
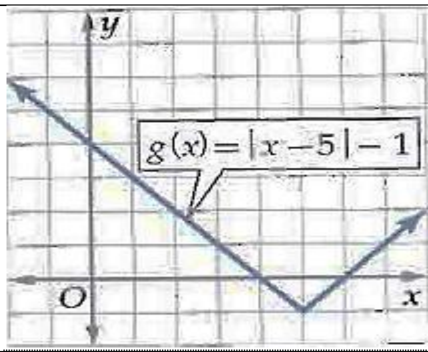
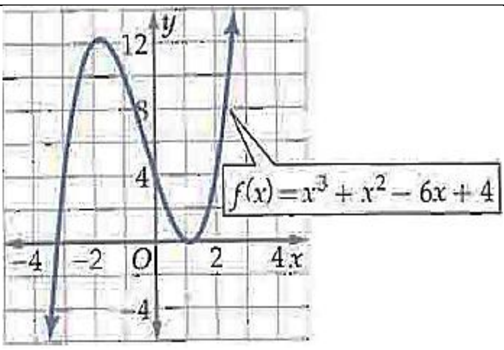
		

كتابة المقاطع

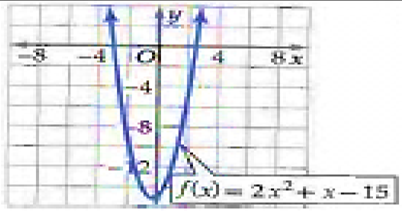
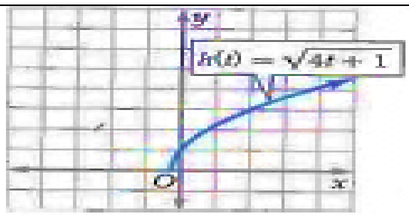
يمكن كتابة المقطع y على صورة زوج مرتب بالشكل $(0, y)$ ، والمقطع x بالشكل $(x, 0)$.



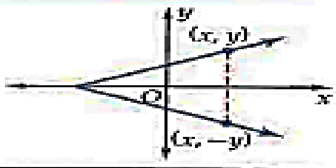
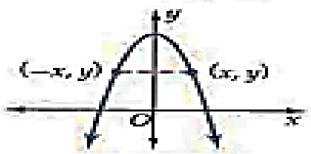
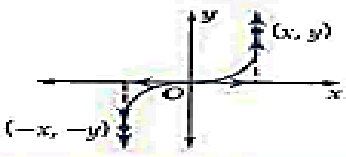
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يلي لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ، ثم أوجده جبرياً .

		
التقدير من التمثيل البياني :	التقدير من التمثيل البياني :	التقدير من التمثيل البياني :
الحل جبرياً :	الحل جبرياً :	الحل جبرياً :

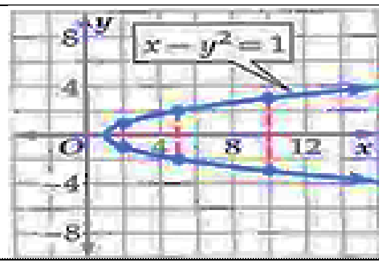
استعمل التمثيل البياني لكل دالة : لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها ، ثم أوجد هذه الأصفار جبرياً

$f(x)=2x^2+x-15$ 	$h(x)=\sqrt{4t+1}$ 

مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ،ونقطة الأصل . عزز إجابتك عددياً ، ثم تحقق منها جبرياً .

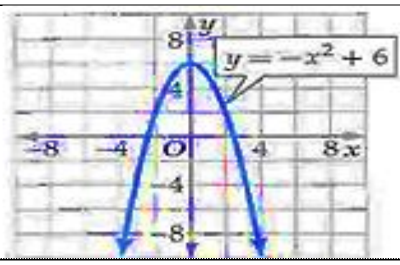


التحليل البياني :

التعزيز العددي :

x		
y		
(x, y)		

التحقق جبرياً :



التحليل البياني :

التعزيز العددي :

x		
y		
(x, y)		

التحقق جبرياً :

التحليل البياني :

التعزيز العددي :

x		
y		
(x, y)		

التحقق جبرياً :

مفهوم أساسي الدوال الزوجية والدوال الفردية

الاختبار الجبري	نوع الدالة
لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.	تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.
لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.	تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.

حدد ما إذا كانت الدالة التالية زوجية أم فردية أو ليست زوجية ولا فردية :

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$	$g(x) = 4\sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

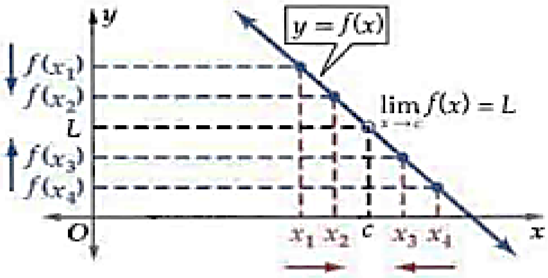
٣) الاتصال والنهايات:

الاتصال : تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة ، وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

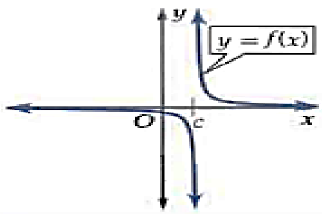
الرموز: نقول إن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .



مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

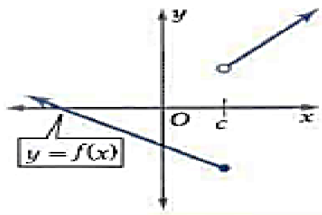
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x=c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



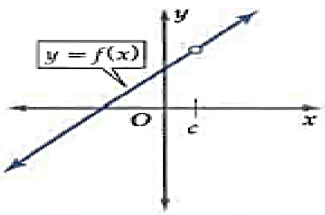
للدالة عدم اتصال قفزي عند $x=c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة عدم اتصال نُقطي عند $x=c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولاتساوي قيمة الدالة عند $x=c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○).

مثال:



ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=c$ إذا حققت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي إن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

حدد ما إذا كانت كل دالة فيما يلي متصلة عند النقط المعطاه أم لا . برر أجابتك (تحقق من شروط الاتصال الثلاثة):

1A. $f(x)=2x^2-3x-1$ عند النقطة $x=2$

x							
y							

$f(x)=x^3$ عند النقطة $x=0$ ☐ ص يم

x							
$f(x)$							

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,x<0\\ x & ,x\ge 0\end{cases}$$ ☐☐ يم

عند النقطة $x=0$

x							
$f(x)$							

حدد ما إذا كانت كل دالة فيما يلي متصلة عند قيم x المعطاه أم لا . برر أجابتك باستعمال اختبار الاتصال ثم حدد نوع عدم الاتصال : (لا نهائي – قفزي – قابل للإزالة)

2A. $x=3$ عند $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$

x							
$f(x)$							

2B. $x=2$ عند $f(x)=\begin{cases} 5x+4 & ,x>2 \\ 2-x & ,x\le 2 \end{cases}$

x							
y							

إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ، لتصبح متصلة عند $x=1$

x							
$f(x)$							

نظرية القيمة المتوسطة ((أنظر الكتاب)) ––– تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة –

حدد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x)=x^3-4x+2$ في الفترة $[-4,4]$

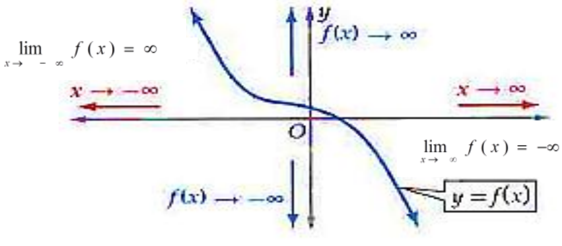
x							
y							

––– تقريب الأصفار دون تغير الإشارة –––

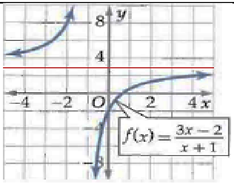
حدد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x)=x^2+x+0.16$ في الفترة $[-3,3]$

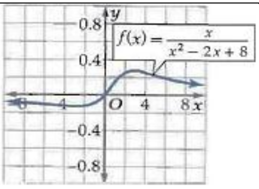
x							
$f(x)$							

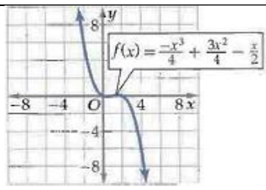
سلوك طرفي التمثيل البياني

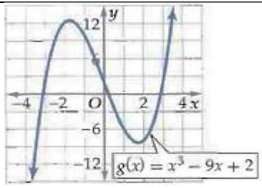


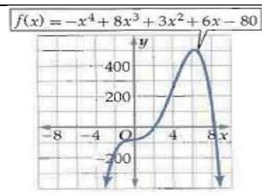
استعمل التمثيل البياني لكل دالة فيما يلي لوصف سلوك طرفي تمثيلها بيانياً .



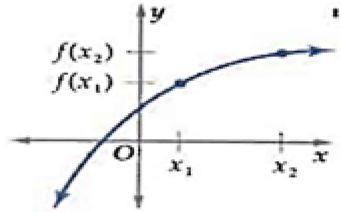
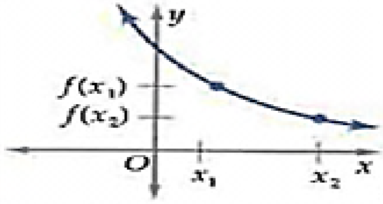
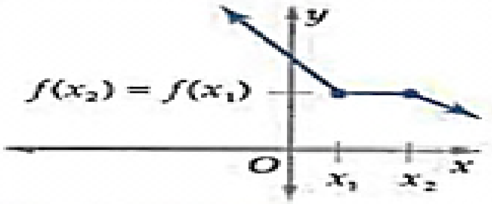




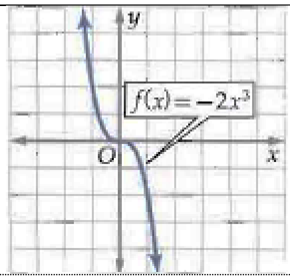




٤) القيم القصوى ومتوسط معدل التغير :

الدوال (المتزايدة – المتناقصة – الثابتة)		
		
لكل x_2 , x_1 في الفترة ، فإنه عندما :	لكل x_2 , x_1 في الفترة ، فإنه عندما :	لكل x_2 , x_1 في الفترة ، فإنه عندما :
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < \quad f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > \quad f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = \quad f(x_2)$

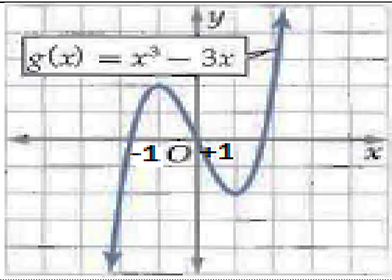
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يلي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة .



التحليل البياني :

التعزيز العددي :

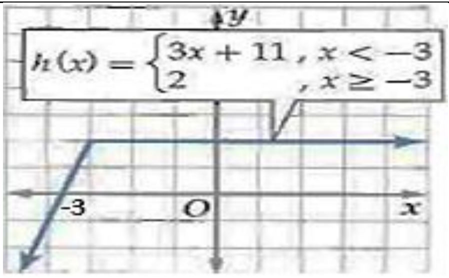
x						
y						
(x, y)						



التحليل البياني :

التعزيز العددي :

x						
y						
(x, y)						



التحليل البياني :

التعزيز العددي :

x						
y						
(x, y)						

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

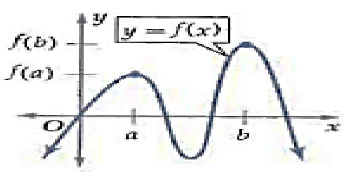
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمة عظمى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \ge f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \ge f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

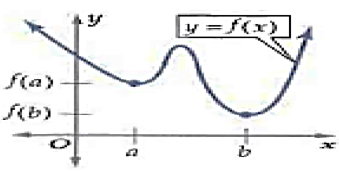
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمة صغرى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \le f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمة صغرى مطلقة.

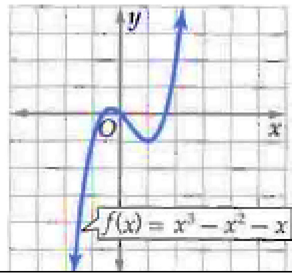
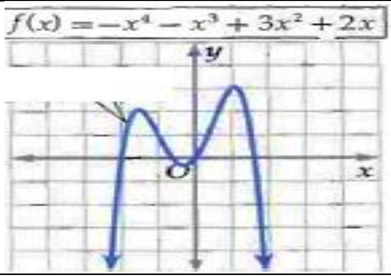
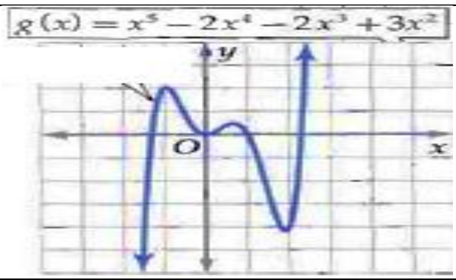
بالرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \le f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

استعمل الرسم البياني لتقدير القيم القصوى للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، وأوجد قيم الدالة عندها وبين نوع القيم القصوى .

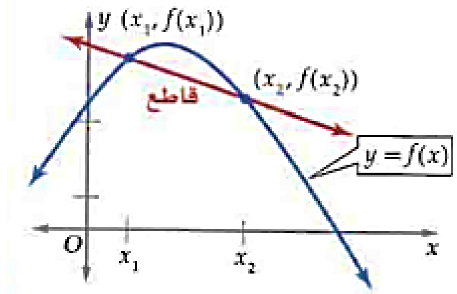
		
....	....	....

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

تعريف : متوسط معدل التغير على منحنى الدالة <u>هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين</u>



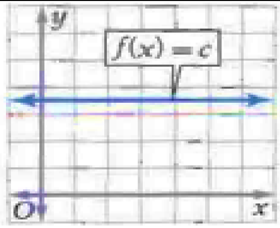
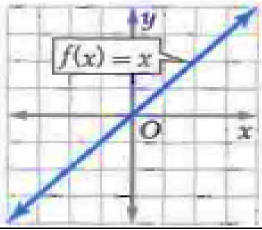
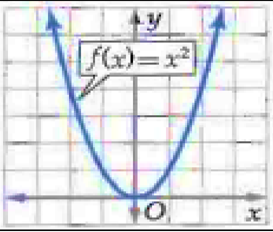
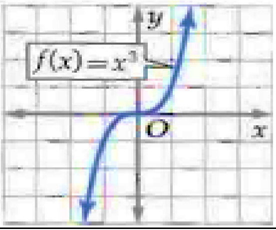
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة :

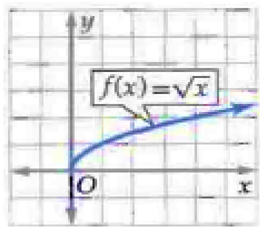
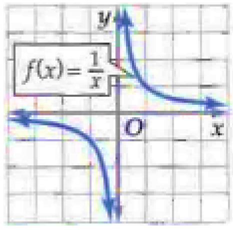
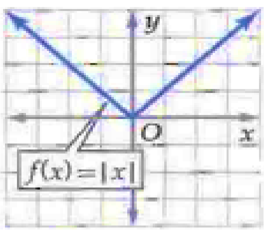
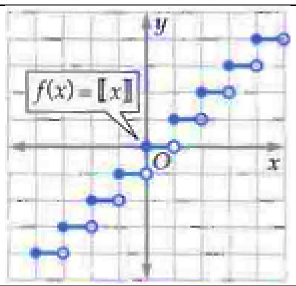
$f(x)=-x^3+3x$ في الفترة $[0,1]$	$f(x)=x^3-2x^2-3x+2$ في الفترة $[2,3]$	$f(x)=3x^2-8x+2$ في الفترة $[4,8]$
....	....	....

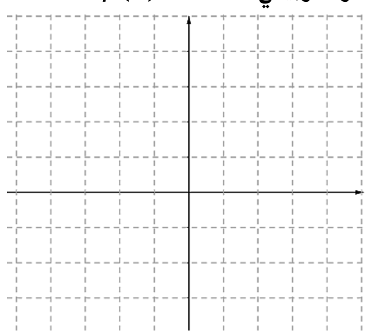
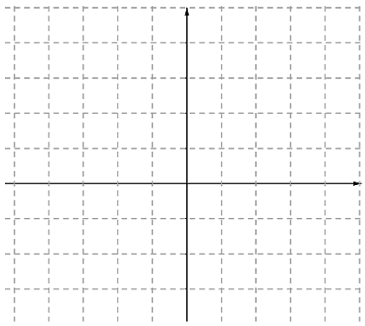
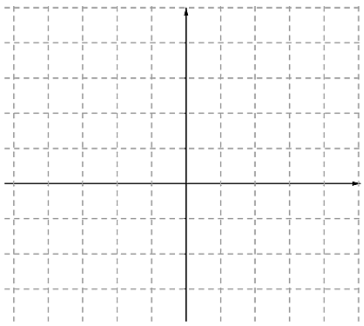
فيــزياء : قذف جسم إلى أعلى من ارتفاع $4\ ft$ عن سطح الأرض ، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يعطى بالدالة : $d(t)=-16t^2+20t+4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها . إذا أهملت مقاومة الهواء ، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 1 إلى 2 ثانية .

....

٥) الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية :

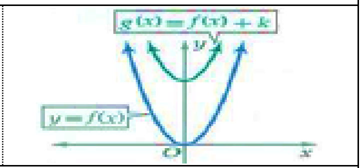
الدوال الرئيسية (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود			
الدالة الثابتة: $f(x)=c$ حيث c عدد حقيقي في محور y	الدالة المحايدة $f(x)=x$ التي إحداثياتها (a,a)	الدالة التربيعية : $f(x)=x^2$ وترسم على شكل الحرف $\cup$	الدالة التكعيبية : $f(x)=x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل
			

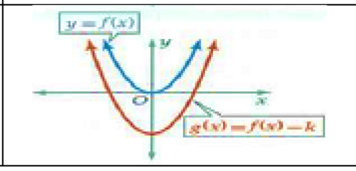
الدوال الرئيسية (الأم) لكل من			
دالة الجذر التربيعي : $f(x)=\sqrt{x}$	دالة المقلوب $f(x)=\dfrac{1}{x}$ وتكون متماثلة لنقطة الأصل	دالة القيمة الطلقة: $f(x)=\lvert x\rvert$ وترسم على شكل الحرف **V** وهذه الدالة من (الدرجة الأولى) $=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ x & ,x\ge 0 \end{cases}$	الدالة الدرجية : $f(x)=[[x]]$ أمثلة : $[[4.3]]=4,$ $[[-4.3]]=-5,$ $[[0.3]]=0$
			

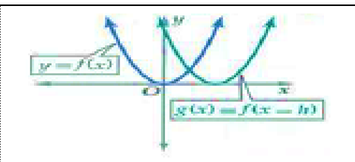
صف خصائص منحني الدوال الآتية مع الرسم لكل دالة من حيث :		
دالة الجذر التربيعي : $f(x)=\sqrt{x}$	دالة القيمة الطلقة: $f(x)=\lvert x\rvert$	الدالة التكعيبية : $f(x)=x^3$
 الرسم :	 الرسم :	 الرسم :
المجال : .... المدى : .... التماثل : .... الاتصال : .... التزايد والتناقص :	المجال : .... المدى : .... التماثل : .... الاتصال : .... التزايد والتناقص :	المجال : .... المدى : .... التماثل : .... الاتصال : .... التزايد والتناقص : ....

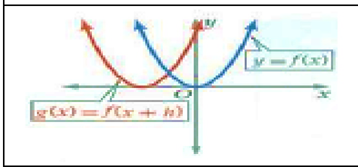
أولاً : الانسحاب

الانسحاب الرأسي: منحني $g(x)=f(x)+K$ هو منحني $f(x)$ مزاحاً : ١) لأعلى .. في حالة $K>0$ ٢) لأسفل .. في حالة $K<0$ بعدد وحدات قيمة K	الانسحاب الأفقي : منحني $g(x)=f(x-h)$ هو منحني $f(x)$ مزاحاً : ١) لليمين h وحدة .. في حالة $h>0$ ٢) لليسار h وحدة .. في حالة $h<0$ لاحظ أنه في العلاقة $f(x+3)=f(x-(-3))$ تكون قيمة $h=-3$ أي إزاحة لليسار .

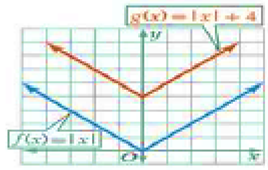
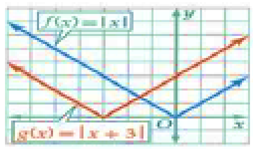
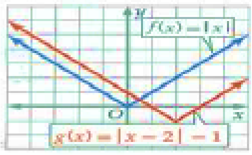




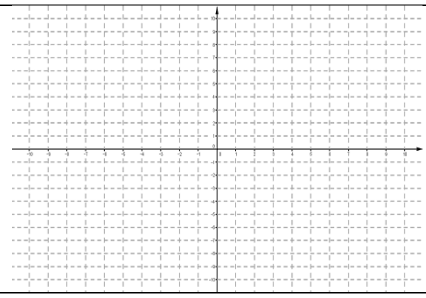
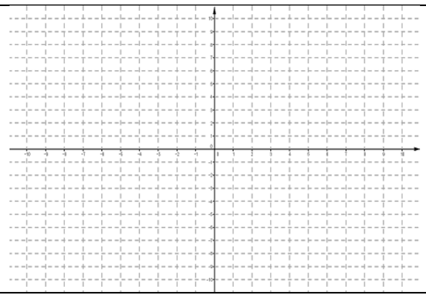
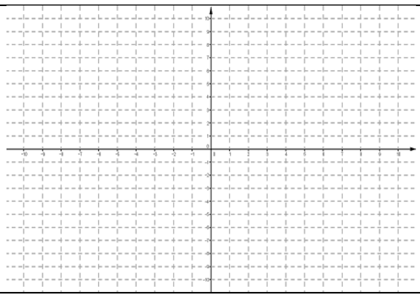




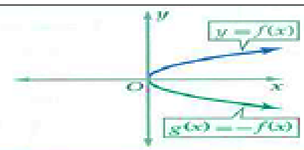
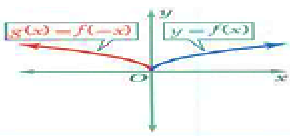
مثال ١ : في دالة القيمة الطلقة: $f(x)=|x|$

$g(x)=\|x\|+4$	$g(x)=\|x+3\|$	$g(x)=\|x-2\|-1$
		

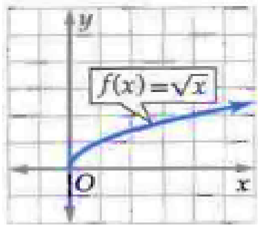
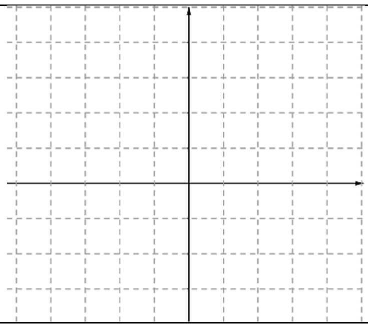
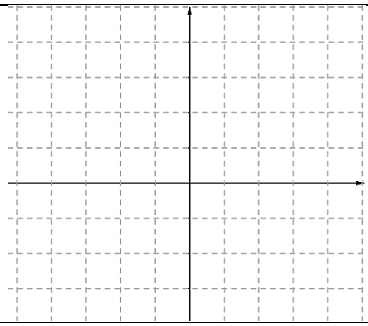
مثال ٢ : الدالة التكعيبية : $f(x)=x^3$

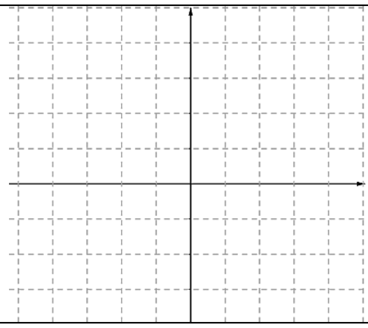
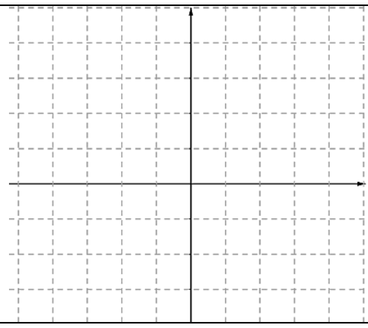
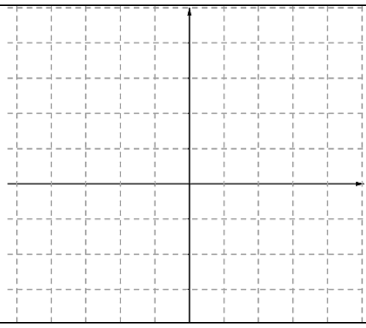
$g(x)=x^3-5$	$g(x)=(x-1)^3$	$g(x)=(x+2)^3+4$
		

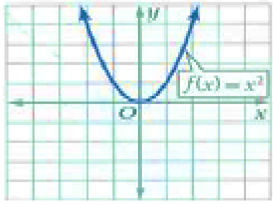
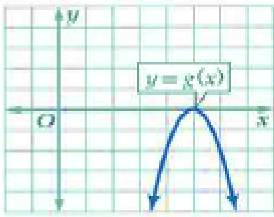
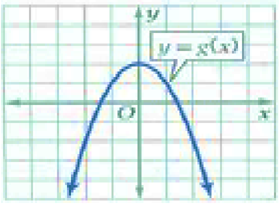
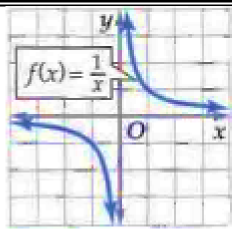
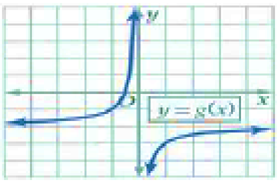
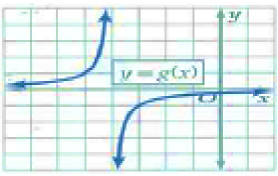
ثانياً : الانعكاس

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
منحنى الدالة $g(x)=-f(x)$ هو انعكاس منحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x	منحنى الدالة $g(x)=f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y
	

مثال ١ : لرسم انسحاب لدالة الجذر التربيعي : $f(x)=\sqrt{x}$ وحدة لليمين ووحدتين للأعلى ثم انعكاس حول المحور x .

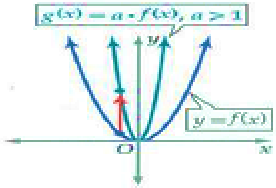
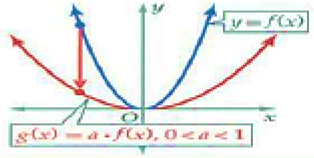
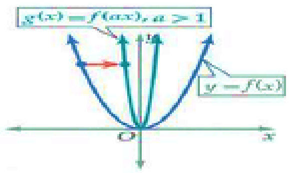
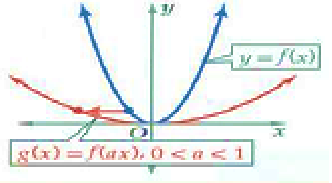
دالة الجذر التربيعي : $f(x)=\sqrt{x}$	المرحلة الأولى (الانسحاب): $f(x)=$.....................	المرحلة النهائية (الانعكاس) : $f(x)=$.....................
		

مثال٢: لرسم انسحاب لدالة الجذر التربيعي : $f(x)=\sqrt{x}$ وحدة لليمين ثم انعكاس حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين للأعلى .			
المرحلة الأولى : انسحاب وحدة لليمين	المرحلة الثانية : انعكاس حول المحور x	المرحلة الثالثة : انسحاب وحدتين للأعلى .	
			تصبح الدالة: $g(x)=-\sqrt{x-1}+2$

مثال٢: صف العلاقة بين منحنى الدالة : $f(x)=x^2$ ومنحنى الدالة $g(x)$ في كل مما يأتي ، ثم اكتب معادلة $g(x)$:		
 الدالة : $f(x)=x^2$		
الـــوصف	....	....
 الدالة : $f(x)=\frac{1}{x}$		
الـــوصف	....	....

التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي : إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، فإن منحنى الدالة : $g(x) = a\ f(x)$ هو :	التمدد الأفقي : إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ، فإن منحنى الدالة : $g(x) = f(a\ x)$ هو :

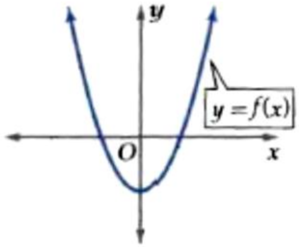
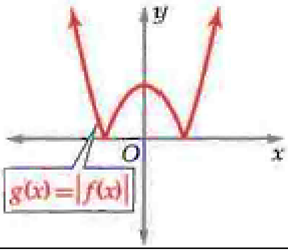
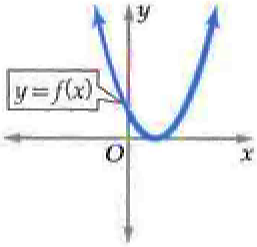
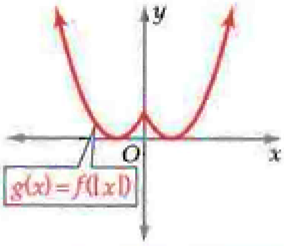
توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$	تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$	تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$	توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$
			

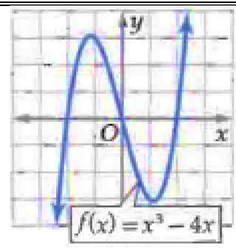
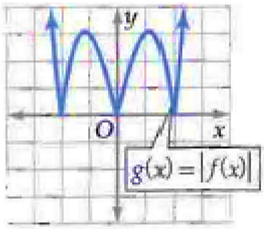
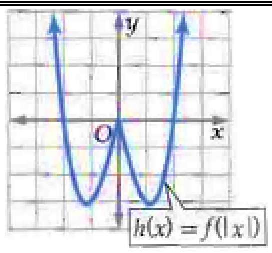
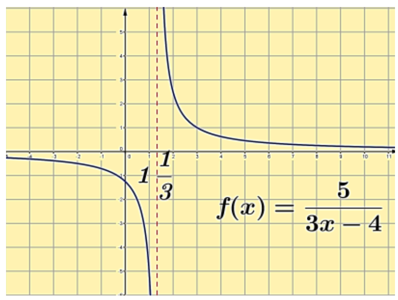
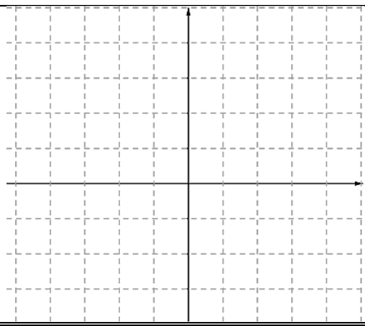
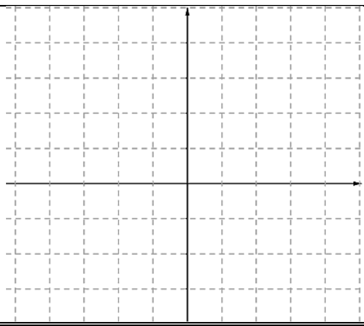
عين الدالة الرئيسية الأم $f(x)$ للدالة $g(x)$ ، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانياً

□□ $g(x) = \frac{1}{4}x^3$	د □ $g(x) = -(0.2x)^2$	□□ $g(x) = [[x]] - 4$	ر □ $g(x) = \frac{15}{x} + 3$
الــــوصف	الــــوصف	الــــوصف	الــــوصف ....
الــــرسم :	الــــرسم :	الــــرسم :	الــــرسم :

مثل الدوال متعددة التعريف التالية بيانياً

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < -1 \\ -1 & , -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , x \ge 4 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x \le 0 \\ x^3 & , 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , x > 2 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & , x < -3 \\ 4 & , -3 \le x \le 2 \\ \lvert 4 - x \rvert & , x > 2 \end{cases}$

التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة :			
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$ يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه:		$g(x)=f(\lvert x\rvert)$ يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .	
قبل	بعد التحويل الهندسي	قبل	بعد التحويل الهندسي
			

(تـــــــــــــــــابع) التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة :		
مثـال ١: الدالة : $f(x)=x^3-4x$		
قبل	بعد التحويل الهندسي للدالة : $g(x)=\lvert f(x)\rvert$	بعد التحويل الهندسي للدالة : $g(x)=f(\lvert x\rvert)$
		
مثـال ٢: الدالة : $f(x)=\dfrac{5}{3x-4}$		
قبل	بعد التحويل الهندسي للدالة : $g(x)=\lvert f(x)\rvert$	بعد التحويل الهندسي للدالة : $g(x)=f(\lvert x\rvert)$
		

٦) العمليات على الدوال وتركيب دالتين :

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ — **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ — **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

إذا كانت $h(x) = 3x - 5$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $f(x) = x^2 + 4x$ فأوجد كلاً من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

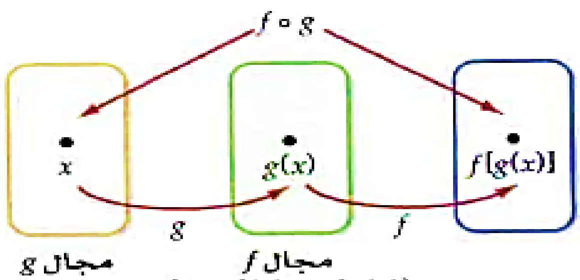
$(f+g)(x) =$	د $(f-h)(x) =$	$(f \cdot h)(x) =$	ر $(\frac{h}{f})(x) =$
المجال:	المجال:	المجال:	المجال:

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

أوجد ناتج كل دالة فيما يلي :

$f(x) = 3x + 1$ ، $g(x) = 5 - x^2$	$[f \circ g](x) =$	$[g \circ f](x) =$	$[f \circ g](3) =$
$f(x) = 6x^2 - 4$ ، $g(x) = x + 2$	$[f \circ g](x) =$	$[g \circ f](x) =$	$[g \circ f](2) =$

حدد مجال الدالة $f \circ g$ متضمناً القيود الضرورية ، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين :

□□ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\ ,\ g(x)=x^2-9$

د □ $f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\ g(x)=x^2-1$

□□ $f(x)=x^2-2\ ,\ g(x)=\sqrt{x-3}$

ر □ $f(x)=\dfrac{5}{x}\ ,\ g(x)=x^2+x$

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين

من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

((لتكن طالب مبدع)) أوجد دالتين f , g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x)=[f \circ g](x)$ على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$:

□□ $h(x)=\sqrt{4x+2}+7$

د □ $h(x)=\dfrac{6}{x+5}-8$

□□ $h(x)=|4x+8|-9$

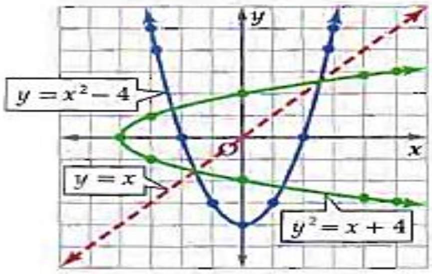
٧) العمليات على الدوال وتركيب دالتين :

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال إن العلاقة A علاقة عكسية للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجود في إحدى العلاقتين فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى. وإذا مُثلت العلاقة بمعادلة فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

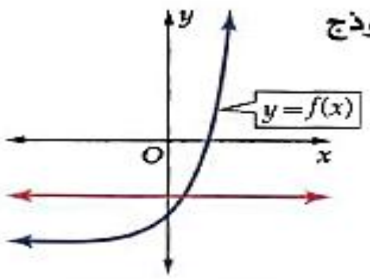
x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



مفهوم أساسي — إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x ، y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن ، وحدد مجالها والقيود عليه ، وإذا لم يكن ممكنا فاكتب غير موجودة :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	د $f(x) = -16 + x^3$	$h(x) = \dfrac{x+7}{x}$

مفهوم أساسي — تركيب الدالة ودالتها العكسية

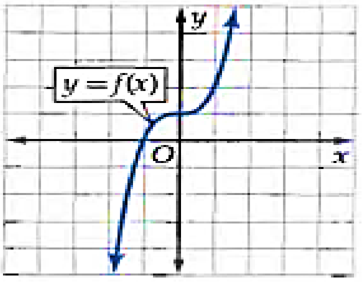
تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

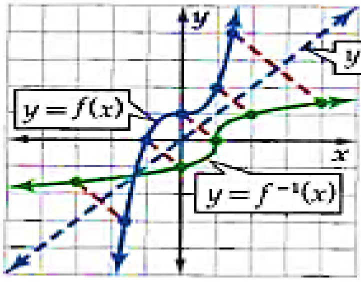
- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

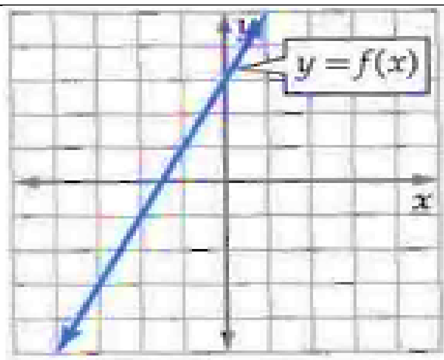
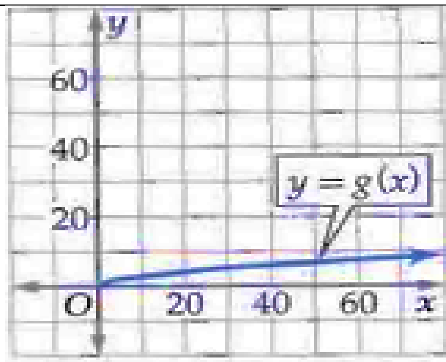
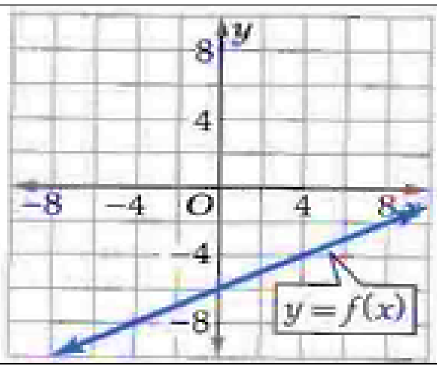
<table>
<tr><td colspan="2">أثبت أن كلاً من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$</td><td>$f(x) = x^2 + 10, \quad , g(x) = \sqrt{x - 10} \; , \; x \geq 10$</td></tr>
</table>

التمثيل البياني للدالة $f(x)$ لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثل بيانيًا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$





<table>
<tr><td colspan="3">استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانياً :</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

١) تمثيل الدوال الأسية بيانياً:

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

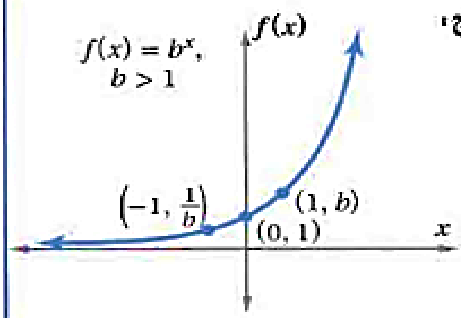
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(\mathbb{R}^+)$

خط التقارب: المحور x

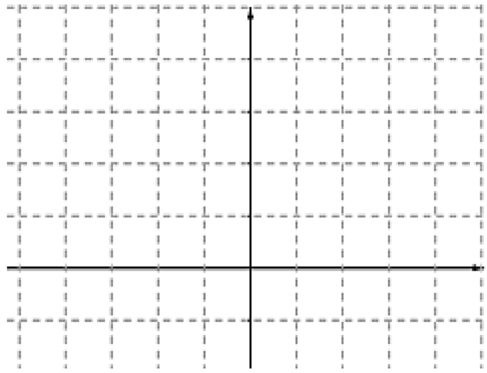
مقطع المحور y: $(0, 1)$

النموذج:



مثـــل الدالة : $y = 3^x$ بيانياً ، وحدد مجالها ومدها .

x	$y = 3^x$



مفهوم أساسي — تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسّية

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

k: إزاحة رأسية

إذا كانت k موجبة ، إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأعلى

إذا كانت k سالبة ، إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأسفل

h: إزاحة أفقية

إذا كانت h موجبة، إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين

إذا كانت h سالبة، إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليسار

a : الشكل والاتجاه

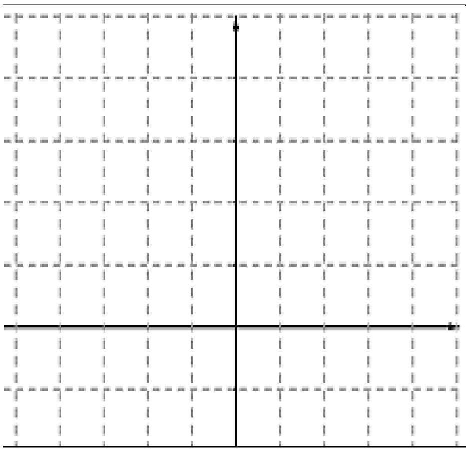
إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور $y = k$

إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا.

إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

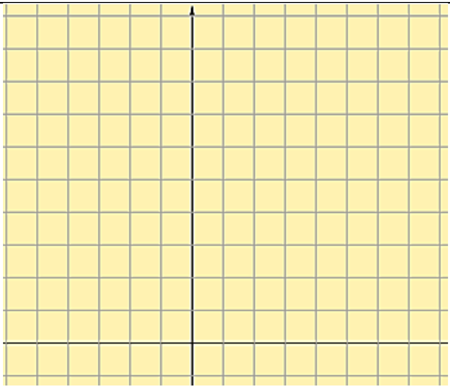
مثـــل الدالة : $y = 2^x + 1$ بيانياً ، وحدد مجالها ومدها .

x	$y = 2^x + 1$



مثـــل الدالة : $y = 2^{x+1} + 1$ بيانياً ، وحدد مجالها ومدها .

x	$y = 2^{x+1} + 1$



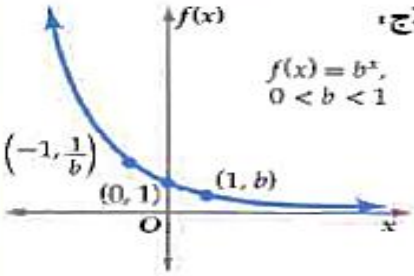
ثقافة مالية : يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 3.5% سنوياً ، إذا كان إنفاق العائلة عام 1425هـ هو 8000 ريال ، أوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1425هـ ....إرشاد : إعتمد على دالة النمو الأسي : $A(n) = a\ (1+r)^n$ حيث $A(t)$ دالة النمو ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو

....

مفهوم أساسي
الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

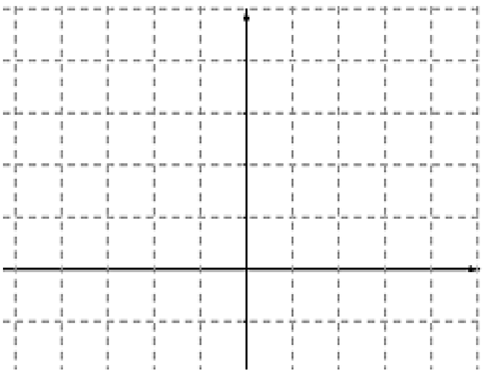
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: (0, 1)

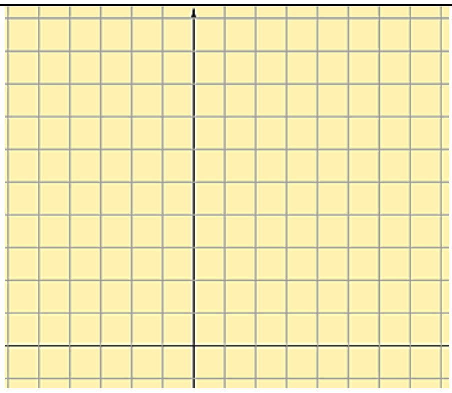
مثـــل الدالة : $y = 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$ بيانياً ، وحدد مجالها ومدها .

x	$y = 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$



مثـــل الدالة : $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$ بيانياً ، وحدد مجالها ومدها .

x	$y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$



٢) حل المعادلات والمتباينة الأسية :

إذا كان $b > 0, b \neq 1$ فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

مــــــثــال : $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ ، وبـــالعكس .

حل كل معادلة مما يأتي :

$2^x = 8^3$	$4^{2n-1} = 64$	$5^{5x} = 125^{x+2}$

إعادة تصنيع : أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ ، وفي عام 1430هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426هـ

a) مفترضاً أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه ، اكتب دالة أسية على الصورة $y = a\ b^x$ تمثل عدد العبوات المعادة تصنيعها y بعد x سنة .

b) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات معادة التصنيع عام 1471هـ

الربح المركب : $A = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة .

استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 12% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهرياً . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات مقرباً الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

حل المتباينات الأسية : المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي — **خاصية التباين لدالة النمو**

التعبير اللفظي : إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال : إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضاً مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي — **خاصية التباين لدالة الاضمحلال**

التعبير اللفظي : إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال : إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

حل المتباينة : $16^{2x-3} < 8$

٣) اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية :

إذا كان $b^x = b^y$ فإن : لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث :

$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$

مثـــــال : $3^y = 27 \leftrightarrow \log_3 27 = y$

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

$\log_2 8 = 3$	$\log_4 16 = 2$	$\log_3 729 = 6$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$15^3 = 3375$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$	$4^3 = 64$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$\log_{16} 4$	$\log_3 81$	$\log_{\frac{1}{2}} 256$

مفهوم أساسي **الخصائص الأساسية للوغاريتمات**

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن :

$\log_5 125$	$12^{\log_{12} 4.7}$	$\log_9 81$	$3^{\log_3 1}$

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = \log_b x$

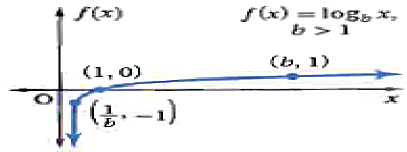
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

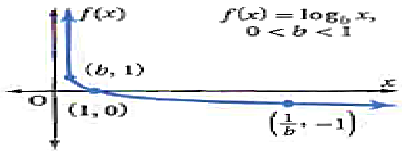
خط التقارب: المحور y

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مقطع المحور x: النقطة $(1, 0)$

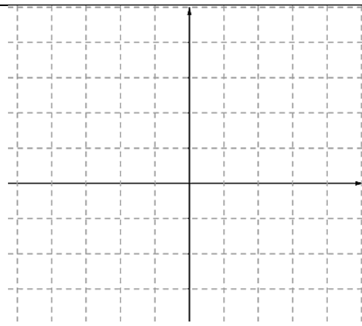




مثل كل دالة مما يأتي بيانياً :

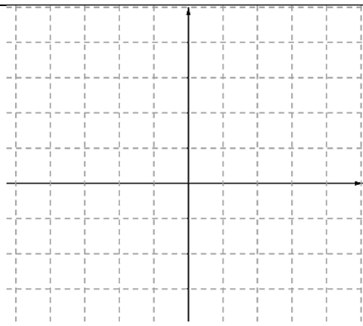
$f(x) = \log_5 x$

الرسم :



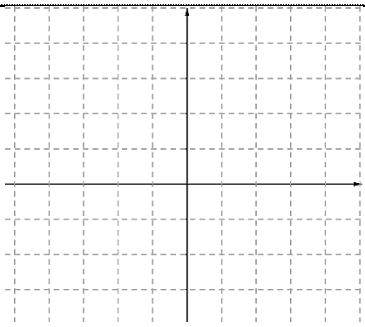
د $f(x) = \log_2 x$

الرسم :



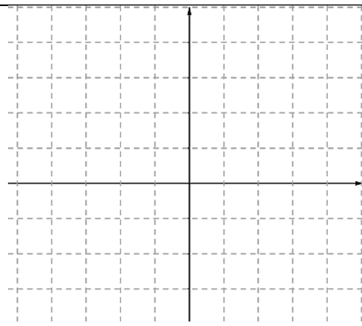
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الرسم :



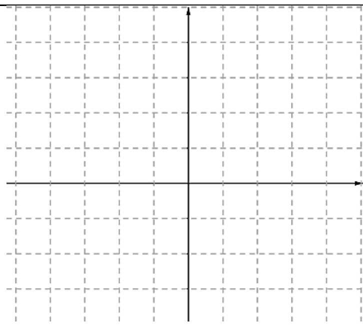
ر $f(x) = 3\log_5 x + 1$

الرسم :



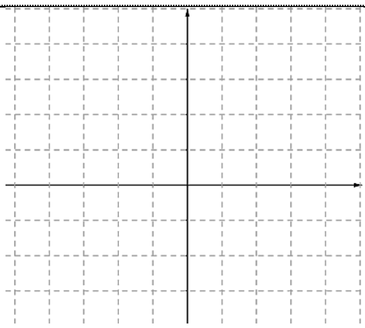
$f(x) = 2\log_3 (x - 2)$

الرسم :



س $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

الرسم :



أوجد معادلة لمعكوس الدالة : $y = 0.5^x$

٤) خصـــائص اللوغاريتمات :

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ فإن :

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

مثـــــال : $\log_5 x = \log_5 8$ فإن $x = 8$ وبـــالعكس

إذا كان x, y, b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ فإن :

خـــاصية	
a)	الضرب في اللوغاريتم $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$
b)	القسمة في اللوغاريتم $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
c)	لوغاريتم القوة $\log_b x^m = m \cdot \log_b x$

أمثـــلة	
a)	الضرب في اللوغاريتم $\log_2 (5)\cdot(6) = \log_2 5 + \log_2 6$
b)	القسمة في اللوغاريتم $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$
c)	لوغاريتم القوة $\log_2 5^6 = 6 \cdot \log_2 5$

استعمل : $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$	استعمل : $\log_3 2 = 0.63$ لإيجاد قيمة $\log_3 4.5$
....	....

إذا كان : $\log_3 7 = 1.7712$ لإيجاد قيمة $\log_3 49$

....

أحسب قيمة :	$\log_6 \sqrt[3]{36}$	$\log_7 \sqrt[6]{49}$
	....	....

أكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :	$\log_{13} 6a^3bc^4$	$\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$	$\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$
	....	....	....

أكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة :	$-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x)$	$\log_3(2x-1) - \frac{1}{4}\log_3(x+1)$
	....	....

٥) **حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية :**

حل المعادلات التالية :	$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	$\log_{9} x = \frac{3}{2}$	$\log_{16} x = \frac{5}{2}$

(اختر الإجابة الصحيحة) ناتج حل المعادلة : $\log_2(x^2-4)=\log_2 3x$			
a) -2	b) -1	c) 2	d) 4
(اختر الإجابة الصحيحة) ناتج حل المعادلة : $\log_3(x^2-15)=\log_3 2x$			
a) -3	b) -1	c) 5	d) 15

حل المعادلات التالية :	$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$	$\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b>1$ و $x>0$ ، $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$

إذا كان $b>1$ و $x>0$ ، $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$

مفهوم أساسي خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز إذا كان $b>1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x>y$ ، وَ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x<y$.

مثال إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

حل المعادلات التالية :	$\log_4 x \geq 3$	$\log_2 x < 4$

حل المعادلات التالية :	$\log_5 (2x+1) \leq \log_5 (x+4)$

٦) اللوغاريتمات العشرية :

اللوغاريتمات العشرية : لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 اللوغاريتمات العشرية ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x,\ x > 0$$

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف			
$\log\ 0.5$	$\log\ 7$	$\log\ 0.3$	$\log\ 5$

$\log x = y$	$\longleftrightarrow$	$10^y = x$
$\log 1 = 0$	$\longleftrightarrow$	$10^0 = 1$
$\log 10 = 1$	$\longleftrightarrow$	$10^1 = 10$
$\log 10^m = m$	$\longleftrightarrow$	$10^m = 10^m$

ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة بقوة 9 درجات على مقياس ريختر .

حل المعادلات التالية وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف	
$6^x = 42$	$3^x = 15$

حل المتباينات التالية وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف	
$4^y \geq 5^{2y+1}$	$3^{2x} \geq 6^{x+1}$

مفهوم أساسي **صيغة تغيير الأساس**

الرموز: لأي أعداد موجبة n، b، a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم الأساس b للعدد الأصلي ← $\log_b n$

لوغاريتم الأساس b للأساس القديم ← $\log_b a$

مثال: $\log_3 11 = \dfrac{\log_5 11}{\log_5 3}$

اكتب ما يلي بدلالة اللوغاريتم العشري ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .	
b) $\log_3\ 11$	a) $\log_6\ 8$
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات ، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية ، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2\ n$. حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة .

....

....

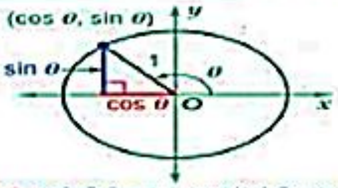
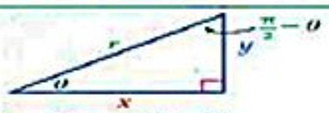
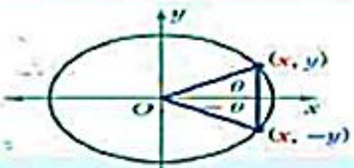
....

....

....

١) المتطابقات المثلثية :

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$
متطابقات المقلوب:	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0$ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس:	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	 حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين:	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$	 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$	 $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ $\sin(-\theta) = -y$, $\cos(-\theta) = x$

المتطابقات المثلثية الأساسية :			
المتطابقات النسبية :	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	
متطابقات المقلوب :	$\tan\theta =$	$\cos\theta =$	$\sin\theta =$
	$\cot\theta =$	$\sec\theta =$	$\csc\theta =$
متطابقات فيثاغورس :	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sin^2\theta =$ .... $\cos^2\theta =$	$\tan^2\theta + 1 =$ .... $\tan^2\theta =$	$\cot^2\theta + 1 =$ .... $\cot^2\theta =$ ....
متطابقات الزاويتين المتتامتين :	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) =$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) =$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) =$ ....
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية :	$\sin(-\theta) =$ .... $\tan(-\theta) =$	$\cos(-\theta) =$	

□) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

د) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

□) بسط العبارات التالية :

تحديات ممتعة

شيم □ $\frac{\sin\theta \ \csc\theta}{\cot\theta}$	صيم □ $\frac{\tan^2\theta \ \csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$	ضيم □ $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} \ (1-\cos^2\theta)$
طيم □ $\tan\theta \ \cos^2\theta$	ظيم □ $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) \ \sec\theta$	عيم □ $(\csc^2\theta - \cot^2\theta)$

٢) إثبات صحة المتطابقات المثلثية :

لإثبات صحة متطابقة : بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

أثبت أن المعادلات التالية تمثل متطابقات :	تحديات ممتعة
$\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$	$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta \ \ \cos^2\theta$

يمكن إثبات صحة متطابقة : من خلال تحويل كلا طرفيها ..

أثبت أن المعادلات التالية تمثل متطابقات :	تحديات ممتعة
$\cos\theta \ \ \cot\theta = \csc\theta \ \ -\sin\theta$	$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta \ \ \tan\theta$

٣) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

مفهوم أساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي :

$\sin(105^\circ)$	
د $\cos(-120^\circ)$	
$\sin 15^\circ$	
ر $\cos(-15^\circ)$	

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2\sin 285^\circ t$ فأجب عما يأتي

) أعد كتابة الصيغة باستعمال الفرق بين زاويتين .

د) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة .

أثبت أن المعادلات التالية تمثل متطابقات :

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

٤) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها :

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان : $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

أوجد القيمة الدقيقة لـكل دالة مما يأتي علماً بأن : $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$\cos 2\theta$	د $\tan 2\theta$

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ، إذا كان : $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ ، حيث θ تقع في الربع الثاني .

يعطي تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريباً بالصيغة : $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$ ، حيث L ، تمثل زاوية دائرة العرض.

) بسط هذه العلاقة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية .	د) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع $4A$ ، واحسب قيمة g عندما $L = 45^\circ$

أثبت أن المعادلة : $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$

٥) حل المعادلات المثلثية :

حل كل معادلة فيما يأتي :	
a) $\sin\theta \ \cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le 180^\circ$	b) $\cos\theta \cdot \sin\theta = 3\cos\theta$ إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$

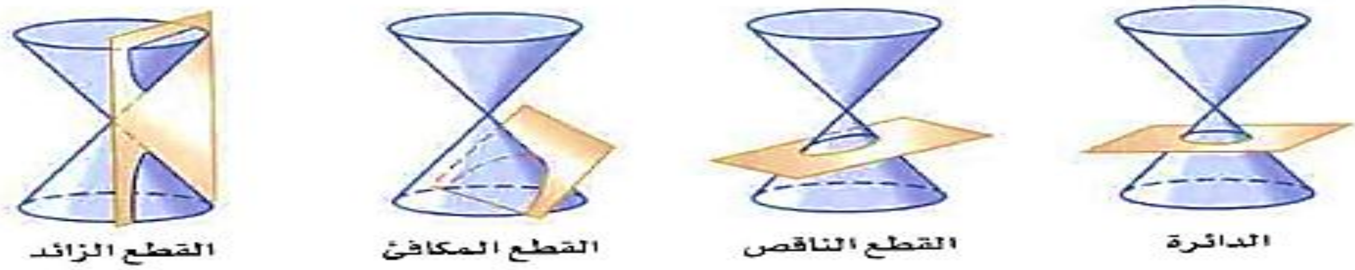
حل كل معادلة فيما يأتي لجميع قيم θ :	
c) $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$ إذا كانت θ مقيسه بالدرجات	d) $2\sin\theta = -1$ إذا كانت θ مقيسه بالراديان .

حل كل من المعادلتين التالية :	
e) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$	f) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

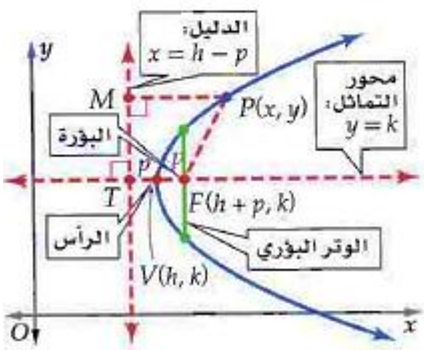
حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات :	
g) $\sin\theta \ \cot\theta - \cos^2\theta = 0$	h) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

١) القطوع المكافئة:

تحليل القطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًا: القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.
والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



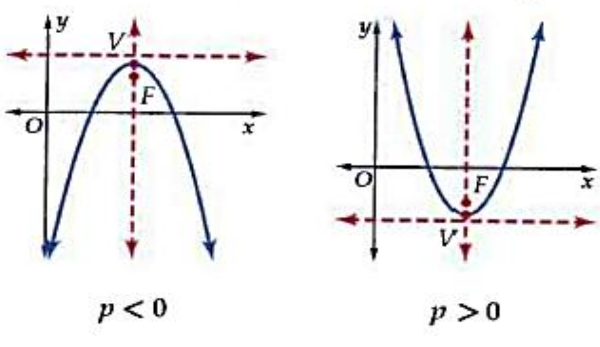
الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث أحد القيم على الأقل $A \text{ or } B \text{ or } C \neq 0$

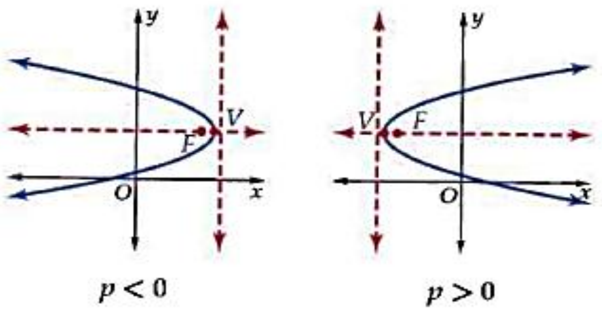


أولاً : القطع المكافئ :

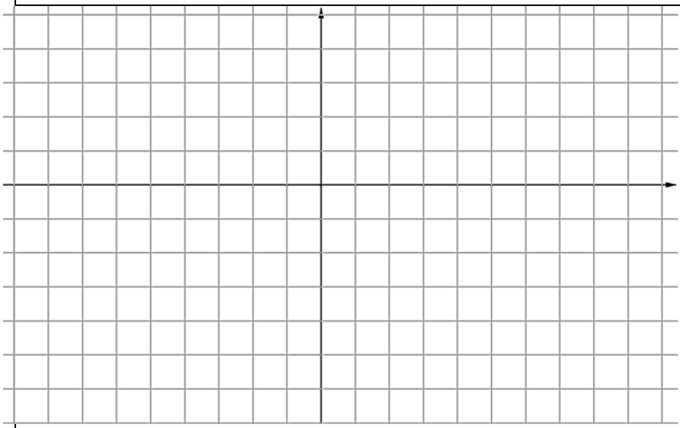
مفهوم أساسي **خصائص القطع المكافئ**

	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
المعادلة في الصورة القياسية:	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+p)$	$(h+p, k)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$	$y = k$
معادلة الدليل:	$y = k - p$	$x = h - p$
طول الوتر البؤري:	$\|4p\|$	$\|4p\|$





حدد خصائص القطع المكافئ : $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ثم مثل منحناه بيانياً .



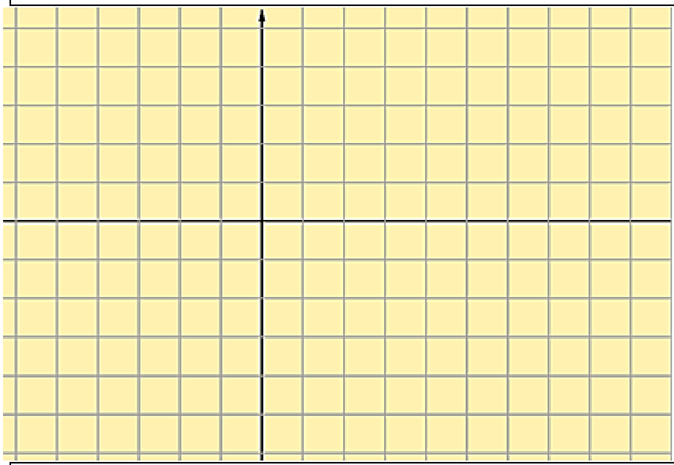
....

....

....

الرأس :	البؤرة :	طول الوتر البؤري : ....
معادلة الدليل :	معادلة محور التماثل	

حدد خصائص القطع المكافئ : $8(y+3) = (x-4)^2$ ثم مثل منحناه بيانياً .



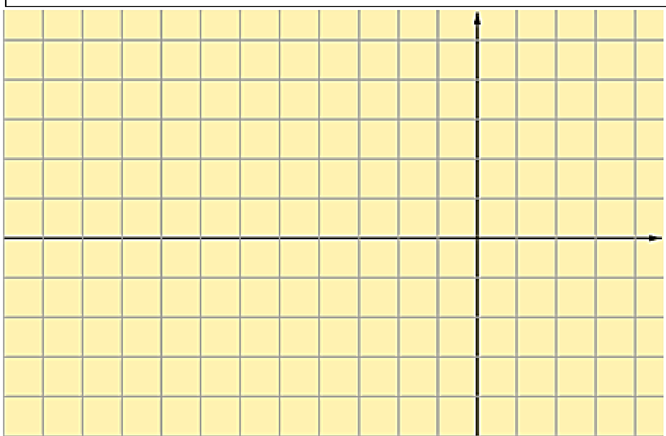
....

....

....

الرأس :	البؤرة :	طول الوتر البؤري : ....
معادلة الدليل :	معادلة محور التماثل	

حدد خصائص القطع المكافئ : $2(x+6) = (y+1)^2$ ثم مثل منحناه بيانياً .



....

....

....

الرأس :	البؤرة :	طول الوتر البؤري : ....
معادلة الدليل :	معادلة محور التماثل	

اكتب المعادلة : $x^2 - 4y + 3 = 7$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدد خصائص القطع المكافئ ومثل منحناه بيانياً .

....

....

....

....

....

....

....

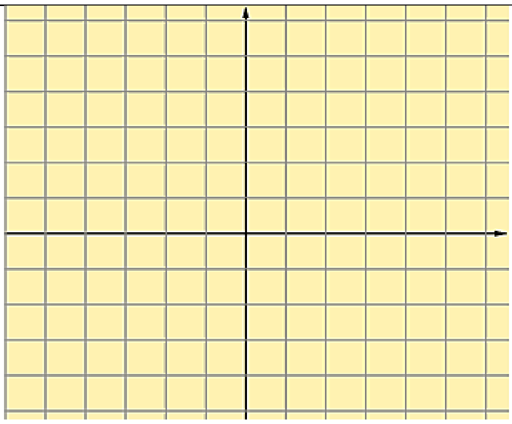
الرأس : ....

البؤرة : ....

طول الوتر البؤري : ....

معادلة الدليل : ....

معادلة محور التماثل ....



اكتب المعادلة : $3y^2 + 6y + 15 = 12x$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدد خصائص القطع المكافئ ومثل منحناه بيانياً .

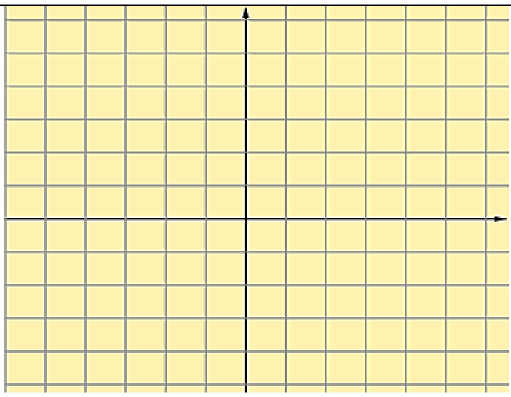
الرأس : ....

البؤرة : ....

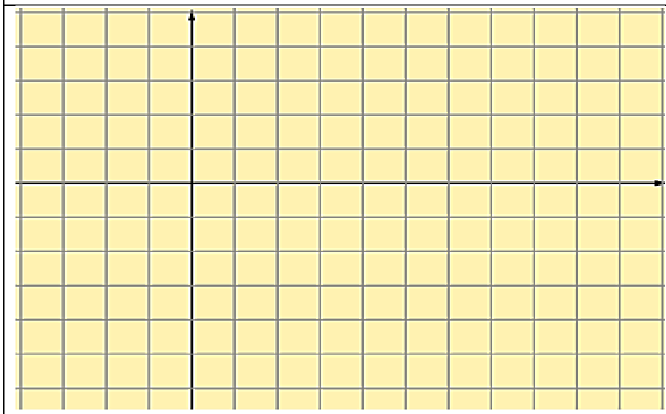
طول الوتر البؤري : ....

معادلة الدليل : ....

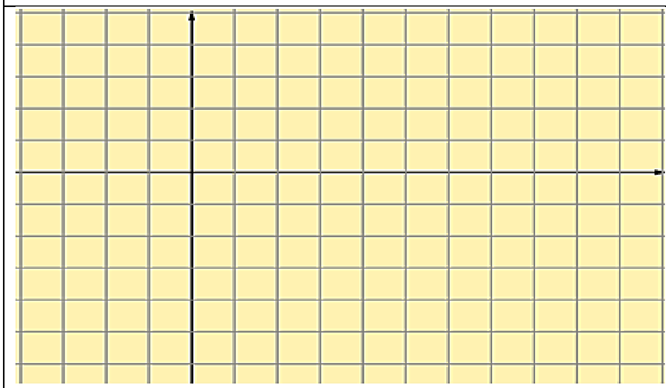
معادلة محور التماثل..............



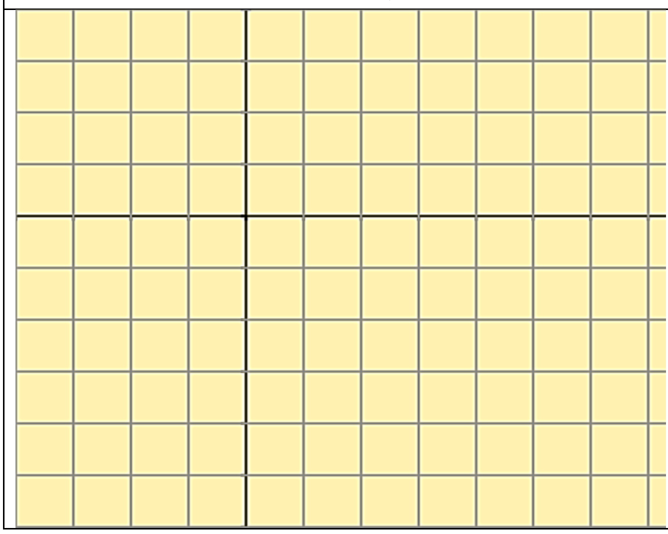
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق أن البؤرة : $(3,-4)$ والرأس : $(1,-4)$ ، ثم مثل منحنى الدالة .



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق أن الرأس : $(3,-2)$ والدليل : $x = 5$ ، ثم مثل منحنى الدالة .



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق أن البؤرة : $(-1,5)$ و المنحنى مفتوح إلى اليمين ، ويمر بالنقطة : $(8,-7)$ ، ثم مثل منحنى الدالة .



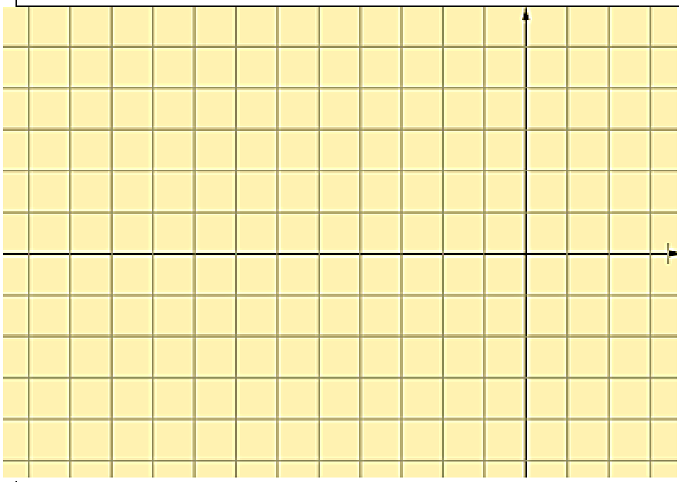
مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ : $y = 4x^2 + 4$ عند النقطة : $C(-1,8)$.

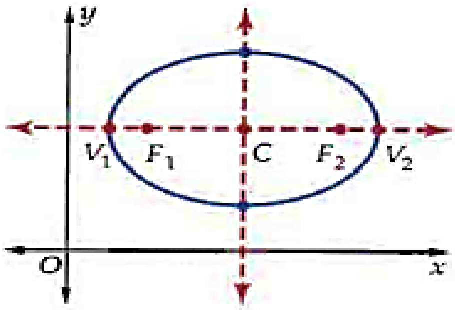


٢) القطوع الناقصة والدوائر :

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

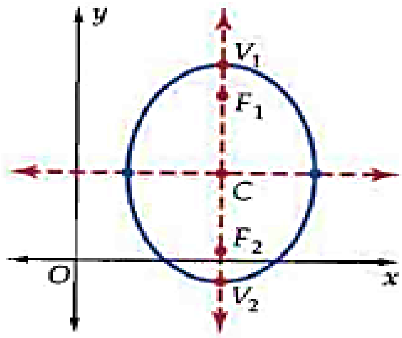
المحور الأكبر : $y = k$ وطوله $= 2k$

المحور الأصغر : $x = h$ وطوله $= 2h$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

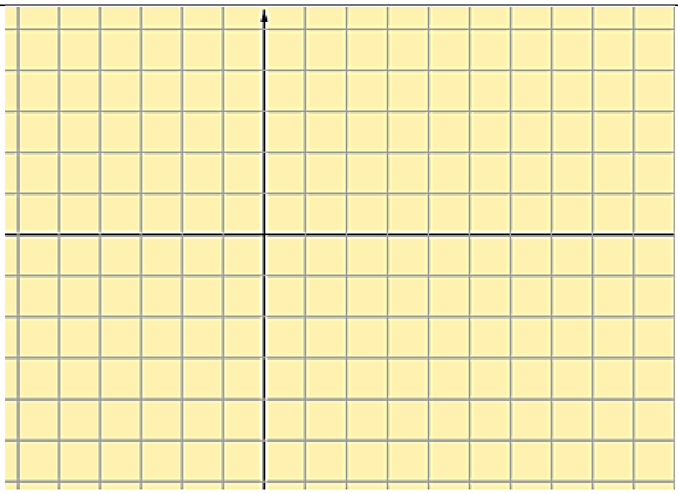
الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ وطوله $= 2h$

المحور الأصغر : $y = k$ وطوله $= 2k$

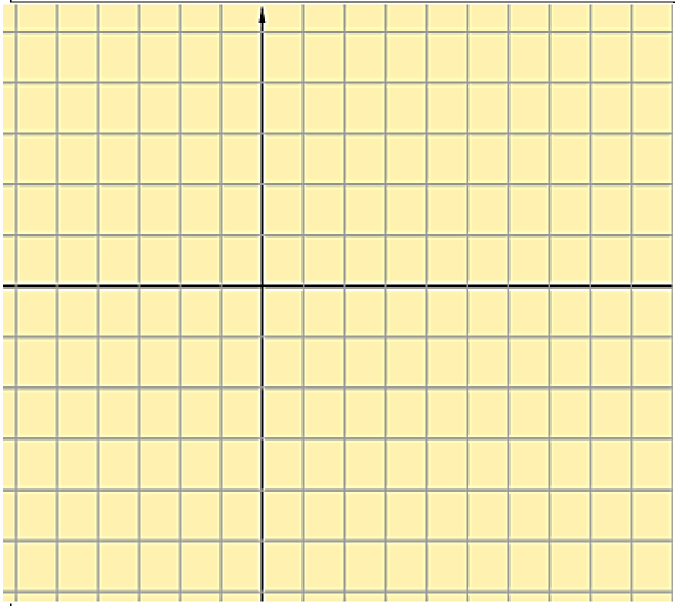
العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

حدد خصائص القطع الناقص الذي معادلته : $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 375 = 0$ ثم مثل منحناه بيانياً .



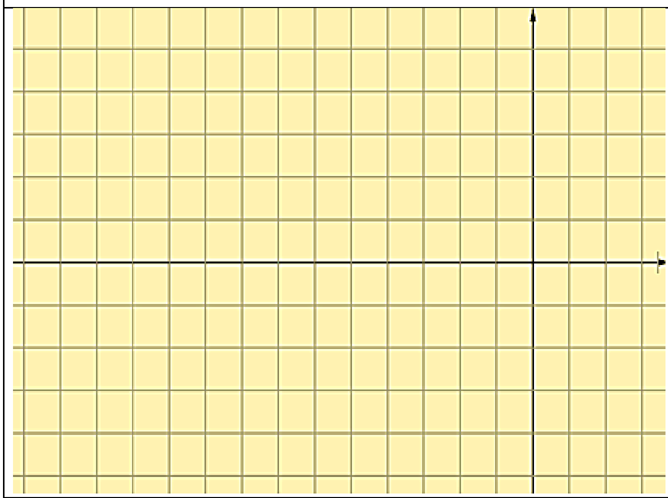
الاتجاه :	المركز :	البؤرتان : ....
الرأسان :	الرأسان المرافقان	معادلة المحور الأكبر : .... معادلة المحور الأصغر : ....

حدد خصائص القطع الناقص الذي معادلته : $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ ثم مثل منحناه بيانياً .

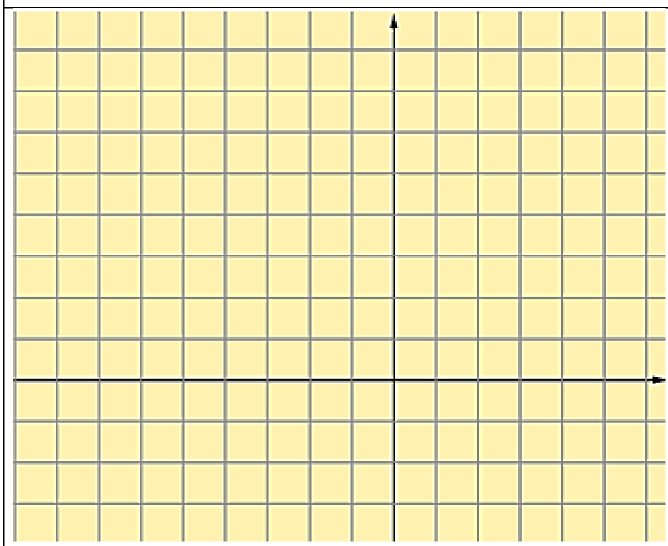


الاتجاه :	المركز :	البؤرتان : ....
الرأسان :	الرأسان المرافقان	معادلة المحور الأكبر : .... معادلة المحور الأصغر : ....

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق نهايتا المحور الأكبر : $(-6,2),(-6,-8)$ و نهاية المحور الأصغر $(-3,-3),(-9,-3)$.



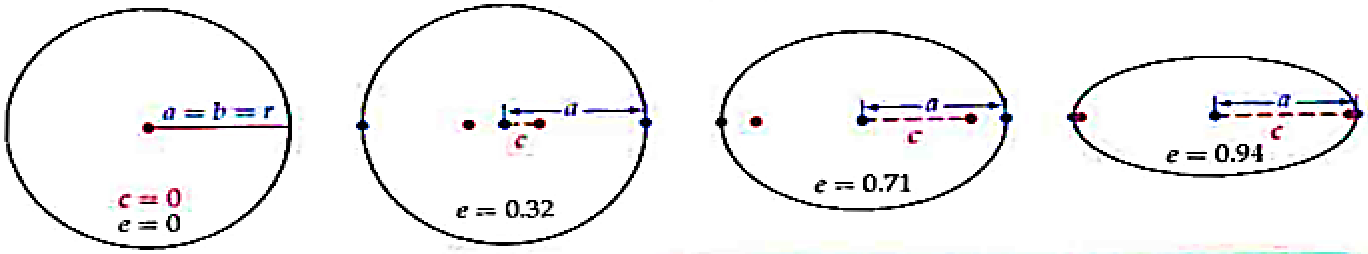
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق أن :الرأسان $(-2,8),(-2,-4)$ و طول المحور الأصغر 10 وحدات .



مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ، حيث $c^2=a^2-b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e=\frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته :	
$\frac{x^2}{18}+\frac{(y+8)^2}{48}=1$	$\frac{(x-4)^2}{19}+\frac{(y+7)^2}{17}=1$

مفهوم أساسي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h , k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

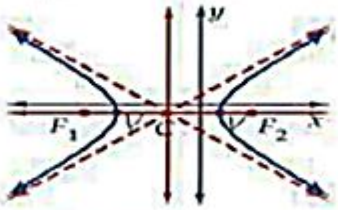
في كل مما يلي أوجد معادلة الدائر والتي تحقق :		
١) المركز $(0,0)$ ، ونصف القطر 3	٢) المركز $(5,0)$ ، و القطر 10	٣) طرفا قطر فيها $(1,5)$, $(3,-3)$.

٣) القطوع الزائدة :

مفهوم أساسي — **خصائص القطع الزائد**

المعادلة في الصورة القياسية :

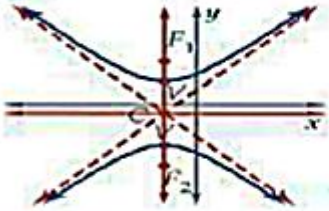
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه :	المحور القاطع أفقي
المركز :	(h, k)
الرأسان :	$(h \pm a, k)$
البؤرتان :	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع :	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق :	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب :	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c :	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$

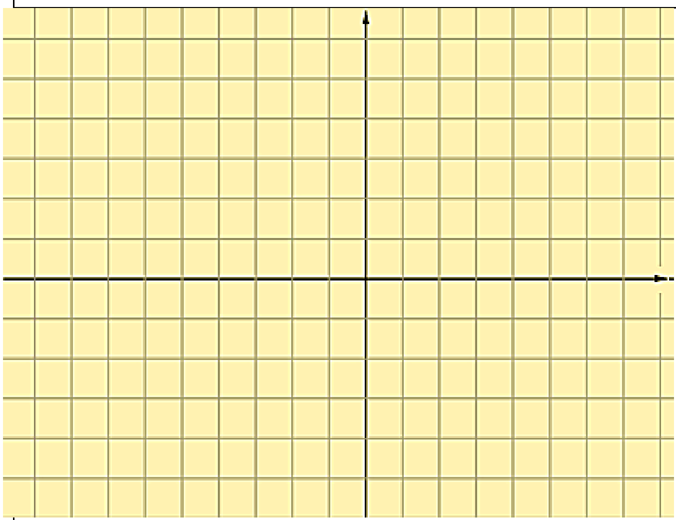
المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه :	المحور القاطع رأسي
المركز :	(h, k)
الرأسان :	$(h, k \pm a)$
البؤرتان :	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع :	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق :	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب :	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c :	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته : $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$ ثم مثل منحناه بيانياً .



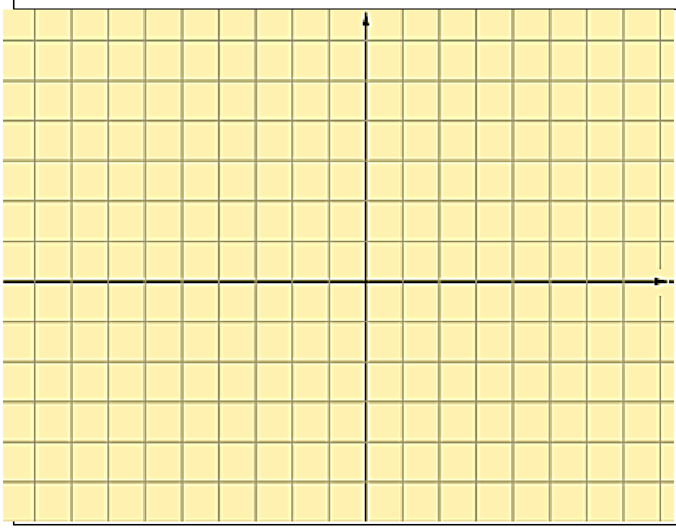
....

....

....

الاتجاه :	المركز :	الرأسان : ....
البؤرتان :	معادلة المحور القاطع : .... معادلة المحور المرافق :	معادلة خطي التقارب ....

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته : $\frac{(y+4)^2}{64}-\frac{(x+1)^2}{81}=1$ ثم مثل منحناه بيانياً .



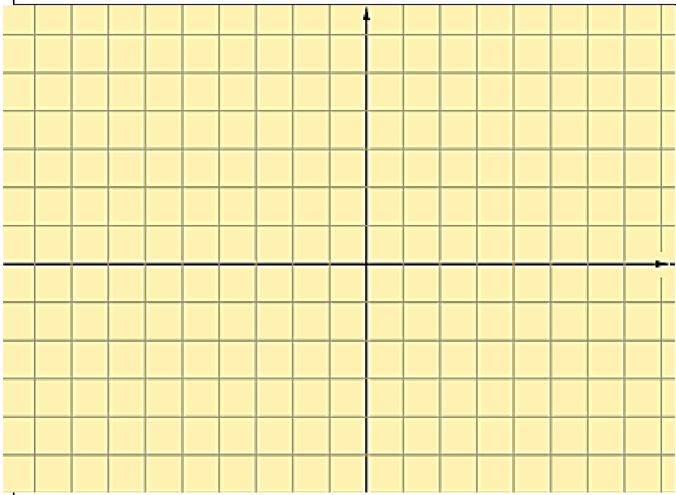
....

....

....

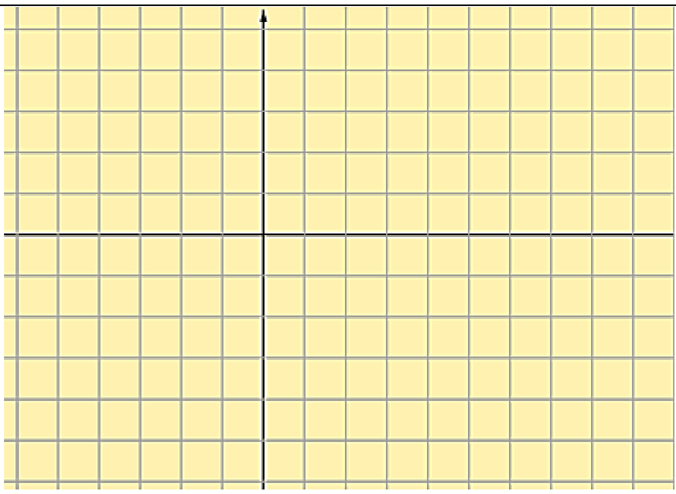
الاتجاه :	المركز :	الرأسان : ....
البؤرتان :	معادلة المحور القاطع : .... معادلة المحور المرافق :	معادلة خطي التقارب ....

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ ثم مثل منحناه بيانياً .



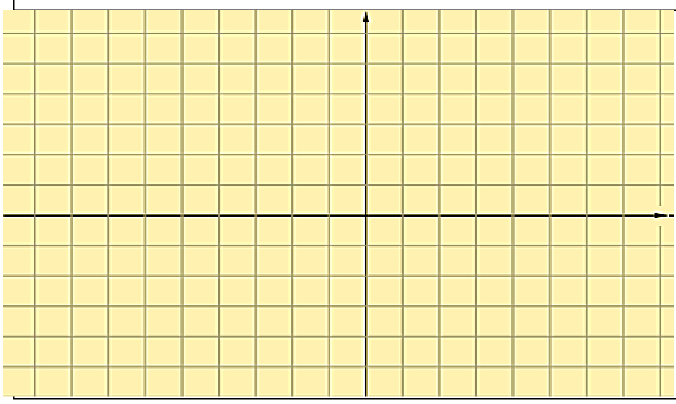
الاتجاه :	المركز :	
البؤرتان :	معادلة المحور القاطع : .... معادلة المحور المرافق :	معادلة خطي التقارب ....

اكتب معادلة القطع الزائد : $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$ على الصورة القياسية ، ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانياً .

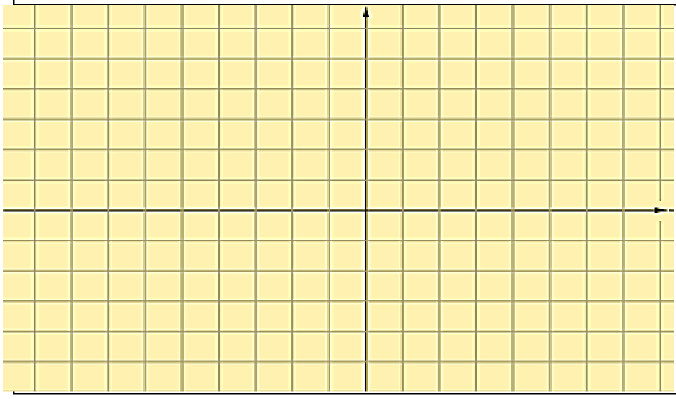


الاتجاه :	المركز :	البؤرتان : ....
الرأسان :	الرأسان المرافقان	معادلة المحور الأكبر : .... معادلة المحور الأكبر : ....

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية :الرأسان $(-3,2),(-3,-6)$ ، والبؤرتان $(-3,3),(-3,-7)$.



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية : البؤرتان $(2,-2),(12,-2)$ ، وخطا التقارب $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$, $y=\frac{3}{4}x-\frac{29}{4}$.



حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي :

١) $\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{(y-4)^2}{80}=1$.

٢) $\frac{(y-2)^2}{15}-\frac{(x+9)^2}{75}=1$

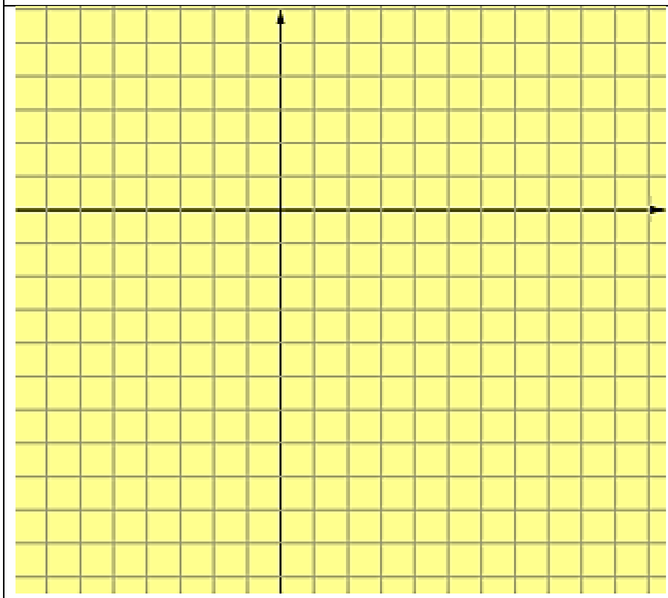
تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر ، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلاً بحرياً .

١) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه ، فاكتب معادلة القطع الزائد إذا كانت المحطتان تقعان عند النقطتين $(-100\ ,0),(100\ ,0)$.

٢) أوجد إحداثي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين ، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100\ ,0)$

٤) تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها :

اكتب المعادلة : $4x^2 + y^2 - 16x + 8y = 0$ على الصورة القياسية ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله ، ومثل منحناه بيانياً .



تصنيف القطوع المخروطية للمعادلة : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

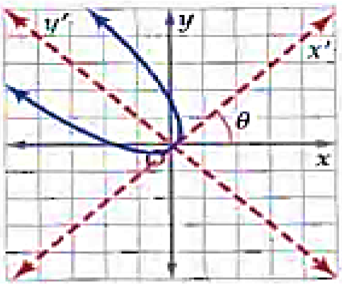
باستعمال المميز : $B^2 - 4AC$

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C, B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, A = C, B = 0$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية :

□ □ $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$	د □ $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$	□ □ $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

مفهوم أساسي دوران محاور القطوع المخروطية



يمكن إعادة كتابة المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy على الصورة $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$ ، بزاوية دوران قياسها θ ، وذلك باستعمال صيغتي الدوران الآتيين:

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad , \quad x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

استعمل $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي يمثله .

مفهوم أساسي دوران محاور القطوع المخروطية

إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ بزاوية دوران قياسها θ ، فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوى xy باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \; y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

إذا كانت معادلة الترس بعد دوران 30° في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$ فاكتب معادلة الترس في المستوى xy .

٥) المعادلات الوسيطية :

مفهوم أساسي **المعادلات الوسيطية**

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنى وسيطيًا. المعادلتان:

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط و I الفترة الوسيطية.

مثل بيانياً المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي :

$x = 3t\ ,\ y = \sqrt{t} + 6\ ;0 \le t \le 8$

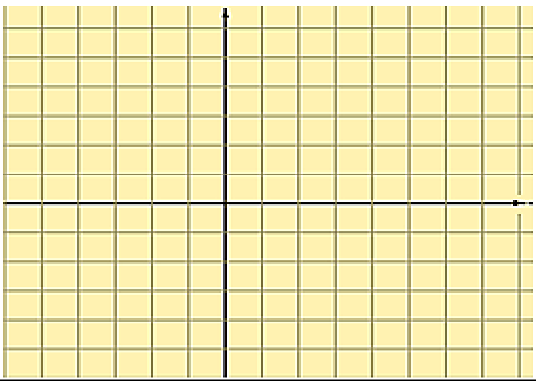
t									
x									
y									

د) $x = t^2\ ,\ y = 2t + 3\ ;-10 \le t \le 10$

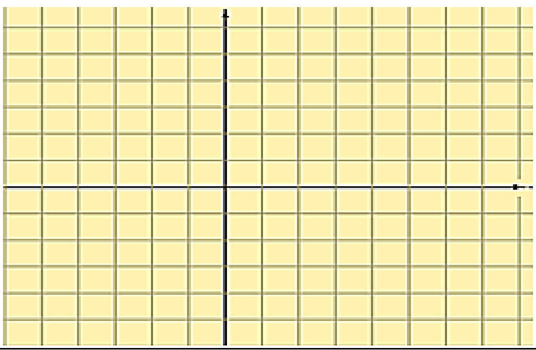
t											
x											
y											

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = t^2 - 5\ ,\ y = 4t$ بالصورة الديكارتية .

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \sqrt{t-4}\ ,\ y = \dfrac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية ، ثم مثل المنحنى بيانياً ، وحدد المجال .



اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 3\sin\theta\ ,\ y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية ، ثم مثل المنحنى بيانياً .



استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة الديكارتية : $x = 6 - y^2$. ثم مثل المنحنى بيانياً موضحاً السرعة والاتجاه :		
□□ $t = x + 1$	د □ $t = 3x$	□□ $t = 4 - 2x$