الدرس

2 2 2 2 2 2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

VERIFYING TRIONOMETRIC IDENTITIES


Welcome

لماذا ؟

عندما ركض عبد الله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى،

كالمعادلة : $\sin\theta = \cos\theta\,\frac{v^2}{gR}$ ، حيث $0 \le \theta \le 90°$

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المعادلة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحة المتطابقات، وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم اساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيـها

الخطوة 1 :

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

الخطوة 2 :

حول العبارة في هذا الطرف إلي صورة العبارة في الطرف الأسهل .

مثال 1

اثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت أن المعادلة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=1+\cos\theta$ تمثل متطابقة .

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$
الطرف الأيسر

$$=\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
بضرب كل من البسط و المقام في $1+\cos\theta$

$$=\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)=1-\cos^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$1+\cos\theta \quad ✓$$
بقسمة كل من البسط و المقام في $\sin^2\theta$

و يساوي الطرف الأيمن من المعادلة

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cot^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)$$

$$= \cos^2\theta\left(\csc^2\theta - 1\right)$$

$$\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$$

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، يمكنك تعزيز إجابتك عدديًا، وذلك باختيار قيمة لـ .
وتعويضها في العبارة التي يمثلها البديل الذي اخترته، ثم مقارنتها بقيمة العبارة الواردة في نص السؤال،
ولكن ذلك لا يمكن أن يكون بديلاً عن تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 علي اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ B $\csc\theta$ C $\cot^2\theta$ B $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار :

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية، لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما ، لذا اعمل على أن تستبدل بالدوال دوال مثلثية أخرى.

حل فقرة الاختبار :

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\,\dfrac{1}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

بالضرب

$$= \frac{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

بقلب المقام وضربه بالبسط

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \bullet \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot\theta \bullet \cot\theta$$

بالضرب

$$= \cot^2\theta$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\left(\cot^2\theta-\cos^2\theta\right)$

A $\cot^2\theta$ B $\tan^2\theta$ C $\cos^2\theta$ B $\sin^2\theta$

تحويل طرفي المتطابقة :

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

مفهوم اساسي

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية .
- حلّل أو اضرب كلاًّ من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط، ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع .
- لا يتم تطبيق خصائص المساواة علي المتطابقات بنفس طريقة تطبيقها علي المعادلات ، فلا تنفذ أي عملية علي كلا طرفي المعادلة المعطاة قبل أن يتم إثبات أنـها متطابقة .لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات .

مثال 3

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت أن المعادلة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$ تمثل متطابقة .

$$\cos\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} \csc\theta - \sin\theta$$

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \bullet \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

بقلب المقام وضربه بالبسط

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cos\theta \bullet \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

بالضرب

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$

الطرف الأيمن

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

بالطرح

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان .

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \cot\theta\tan\theta$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \bullet \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(1 $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

(2 $\cot\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

$$\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta$$

$$= \cot^2\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta + 1$$

$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

$1 + \sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^2\theta$ (3

$$1 + \sec^2\theta \sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$1 + \sec^2\theta \sin^2\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\theta$$

$$= 1 + \tan^2\theta$$

$$= \sec^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

$\sin\theta \sec\theta \cot\theta = 1$ (4

$$\sin\theta \sec\theta \cot\theta \stackrel{?}{=} 1$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta \sec\theta \cot\theta$$

$$= \sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

$$\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2 \quad (5$$

$$\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta - \cot\theta)^2$$

نبدأ بالطرف الأيمن $(\csc\theta - \cot\theta)^2$

$$= \csc^2\theta - 2\cot\theta\csc\theta + \cot^2\theta$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - 2\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta \quad (6$$

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan\theta - \cot\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

$$\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta} \quad (7$$

$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

$$\cos\theta = \sin\theta\cot\theta \quad (8$$

$$\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\sin\theta\cot\theta$$

$$= \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cos\theta \checkmark$$

ويساوي الطرف الأيسر

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta \quad \textbf{(9}$$

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta)$$

$$= \sin\theta\tan\theta + \sin\theta\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= -\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1 \quad \mathbf{(10}$$

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta)$$

$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\dfrac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$ ؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

12) $\sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\sec\theta-\tan\theta\stackrel{?}{=}\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sec\theta-\tan\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيمن

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\sec\theta \quad (13$$

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\stackrel{?}{=}\sec\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

$\sec\theta \csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$ (14

$$\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta + \cot\theta$$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta\csc\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta + \cot\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta} \quad (15$$

$$\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \sin\theta + \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} \quad \textbf{(16}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=2\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=2\cos\theta\sin\theta+1$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\frac{2+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}$$

$$=\left(2+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$

$$=2\cos\theta\sin\theta+1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

(17 $$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\stackrel{?}{=}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

(18 $$\csc\theta-1=\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$\csc\theta-1\stackrel{?}{=}\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$=\frac{\csc^2\theta-1}{\csc\theta+1}$$

$$=\frac{(\csc\theta-1)(\csc\theta+1)}{\csc\theta+1}$$

$$=\csc\theta-1$$

ويساوي الطرف الأيسر

$\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$ (19

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

نبسط الطرف الأيسر

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta=1$

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta\stackrel{?}{=}1$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta$$

$$=\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=1$$

ويساوي الطرف الأيمن

$\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$ **(21**

$$\sec\theta - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta \sin\theta$$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta - \cos\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta \sin\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

$$\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta \quad (22$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$

$$= \cot^2\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta + 1$$

$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta \quad (23$$

$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$

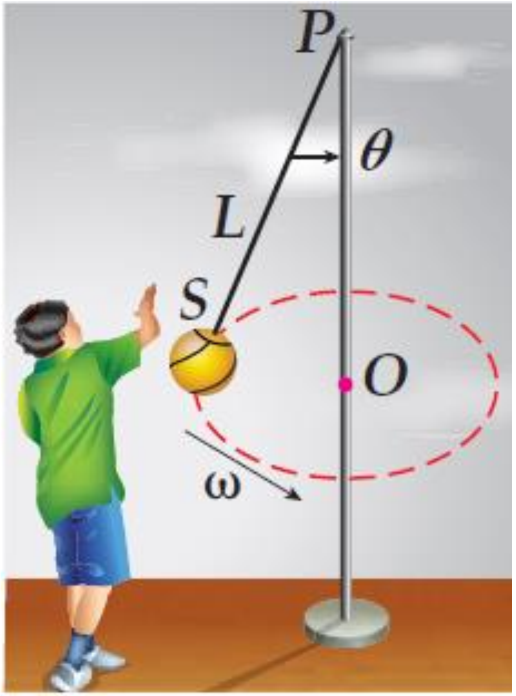
$$= \frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} - \frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta}$$

$$= \sin\theta - \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g \sec \theta}{\omega^2}$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g \tan \theta}{\omega^2 \sin \theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك



نعم

25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار. وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$.

فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

$6.5\,m / s$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

(26 $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ $\quad 1$

(27 $\sin\theta\csc(-\theta)$ $\quad -1$

(28 $\sin^2(-\theta)+\cos^2(-\theta)$ $\quad 1$

(29 $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ $\quad -1$

(30 $\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta)$ $\quad 1$

(31 $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\quad -1$

(32 $\cos(-\theta)\sec\theta$ $\quad 1$

(33 $\sin(-\theta)\csc\theta$ $\quad -1$

بسّط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

(34 $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ $\quad \cos\theta$

(35 $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$ $\quad \tan\theta$

(36 $\dfrac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2 x+\sin^2 x}$ $\quad 1$

(37 $\tan\theta\cos\theta$ $\quad \sin\theta$

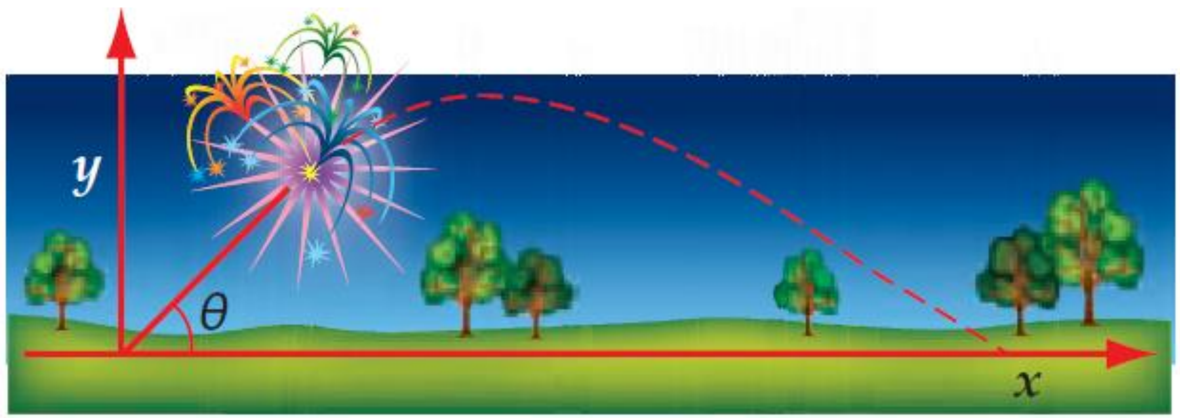
(38 $\cot\theta\tan\theta$ $\quad 1$

(39 $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\quad 1$

(40 $(\sec^2\theta+\csc^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$ $\quad 2$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة:

$y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



$$y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2}\left(1+\tan^2\theta\right) + x\tan\theta$$

42) إلكترونيات: عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R ، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi ft$ ، حيث f التردد ، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

$$P = I_0{}^2 R\left(1 - \cos^2 2\pi ft\right)$$

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

$$P = \frac{I_0{}^2 R}{1 - \csc^2 2\pi ft}$$

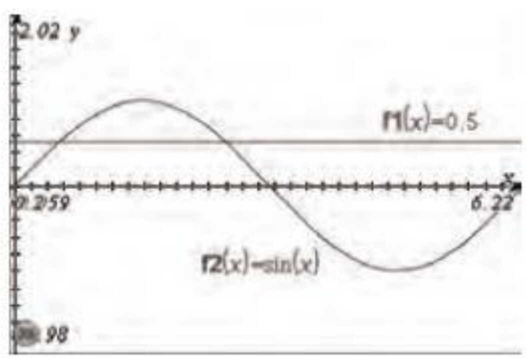
43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $2\sin x = 1$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

b) **بيانيًّا :** مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \leq x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

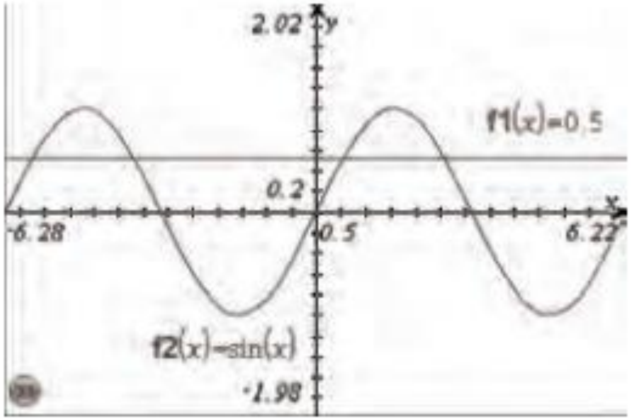
يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$, $y = \sin x$ عند النقاط $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$ ، على الفترة $[0, 2\pi)$.



c) **بيانيًّا :** مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا ، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما ، وأوجد قيم x بالراديان.

يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$, $y = \sin x$ عند النقاط

$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ ، على الفترة $[-2\pi, 2\pi)$



d) **لفظيًا:** خمن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

إجابة ممكنة: بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ وَ $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.