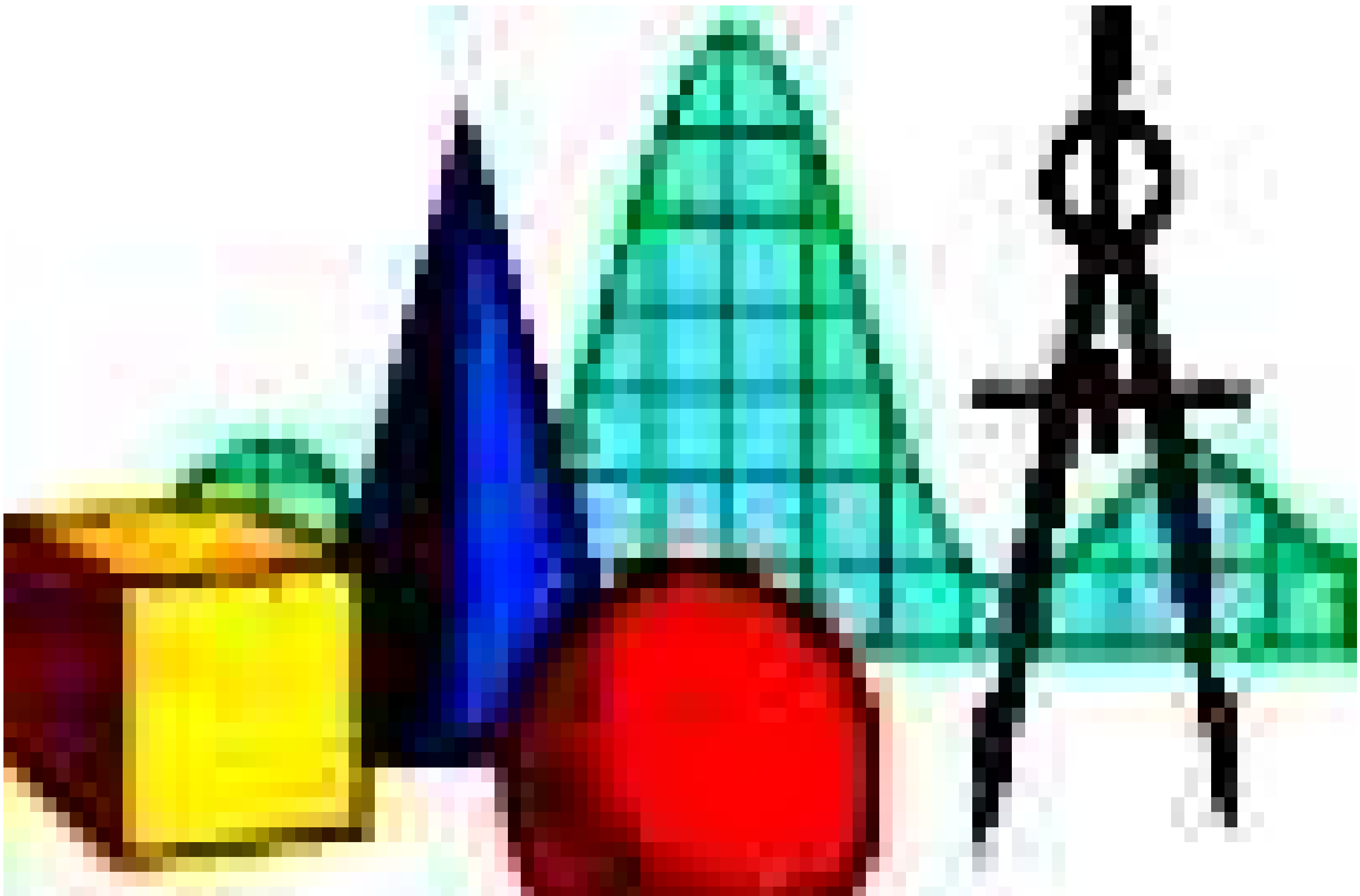
الفصل 5

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



الصف الأول الثانوي

الفصل الخامس الأشكال الرباعية

زوايا المضلع 1 – 5

مجموع قياسات الزوايا الداخلية :

مضلعات محدبة	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا
مثلث	3	1	$(180 \cdot 1) = 180$
رباعي	4	2	$(180 \cdot 2) = 360$
خماسي	5	3	$(180 \cdot 3) = 540$
سداسي	6	4	$(180 \cdot 4) = 720$
سباعي	7	5	$(180 \cdot 5) = 900$
ماني	8	6	$(180 \cdot 6) = 1080$

ملاحظات :

1) عدد المثلثات = عدد أضلاع الشكل – 2

2) مجموع قياسات زوايا الشكل = 180 · عدد المثلثات

نظرية 1 – 5 مجموع قياسات الزوايا الداخلية

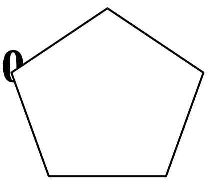
إذا كان عدد أضلاع مضلع محدب n
ومجموع قياساته زواياه الداخلية S
فإن : $S = 180\,(n - 2)$

مثال

$n = 5$

$S = 180\,(n - 2)$

$S = 180\,(5 - 2) = 540$



---

1) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للثماني المحدب

الحل :

---

2) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للخماسي المحدب

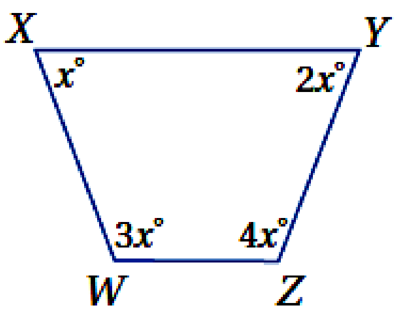
الحل :

---

3) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للعشاري المحدب

الحل :

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للمضلع المقابل



الحل :

،،

ملا□ظة :

قياس كل زاوية داخلية لاي مضلع منتظم يساوي ناتج قسمة مجموع قياسات الزوايا الداخلية علي عدد الزوايا (عدد الأضلاع) أي أن

قياس كل زاوية داخلية = $\frac{180(n-2)}{n}$ □يث n عدد الزوايا او الإضلاع

،،

1) إذا كان قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم 144° فما عدد أضلاعه

الحل :

،،

2) سجاد : أوجد قياس زاوية داخلية لسجادة علي شكل ثماني منتظم

الحل :

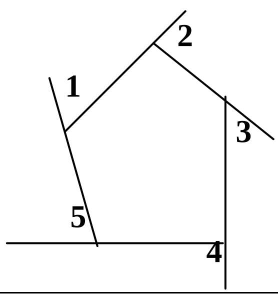
،،

3) توفير : تزين النوافير الأماكن العامة ، ويقام بعضها علي شكل مضلعات منتظمة ، أوجد قياس زاوية داخلية لنافورة علي شكل تساعي منتظم

الحل :

،،

مجموع قياسات الزوايا الخارجية :

نظرية 2 ـ 5	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
إذا كان المضلع محدبا فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية ـ زاوية وا□دة عند كل رأس ـ يساوي 360 مثال : $m\angle1 + m\angle2 + m\angle3 + m\angle4 + m\angle5 = 360^\circ$	

،،

ملاحظة :

إذا كان المضلع منتظم فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية = $360^\circ = n \cdot$ عدد الأضلاع

حيث n قياس الزاوية الخارجية ويكون $n = 360 \div$ عدد الأضلاع

أوجد قياس كل زاوية خارجية لكل من المضلعات المنتظمة الآتية :

1) الخماسي

الحل :

---

2) السداسي

الحل :

---

3) العشاري

الحل :

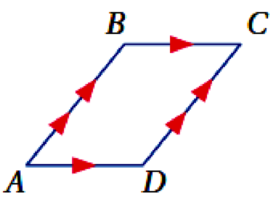
---

4) الرباعي

الحل :

متوازي الأضلاع 2 – 5

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱.
ففي $▱ABCD$ المبين جانبًا، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ بحسب التعريف.



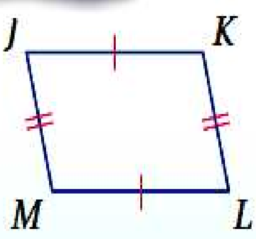
نظريات

أضف إلى مطويتك

خصائص متوازي الأضلاع

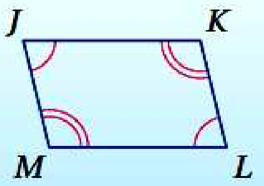
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$.



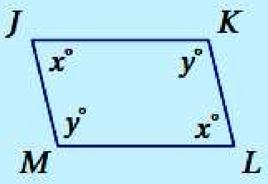
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L\ ,\ \angle K \cong \angle M$.



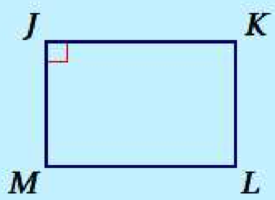
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x + y = 180$.



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في $\square JKLM$، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ : $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

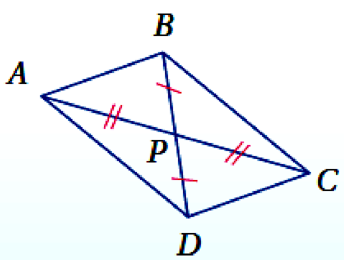
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطرا متوازي الأضلاع

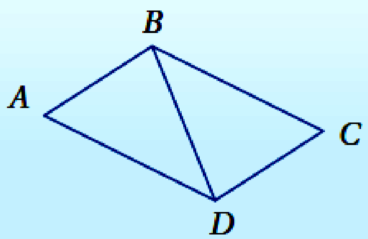
5.7 قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}\ ,\ \overline{DP} \cong \overline{PB}$.



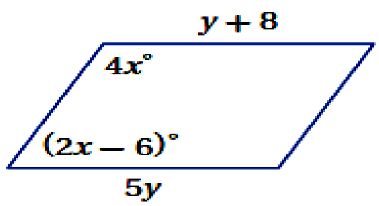
5.8 قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

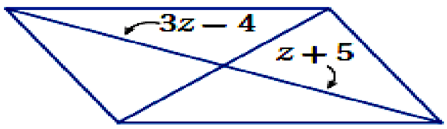


أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



2B)



الحل :

''

هندسة إحداثيّة : أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

الحل :

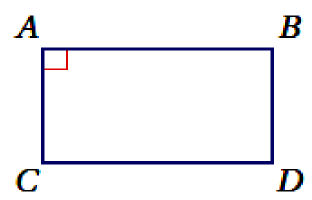
''

برهان : اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

1) برهان□ر

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

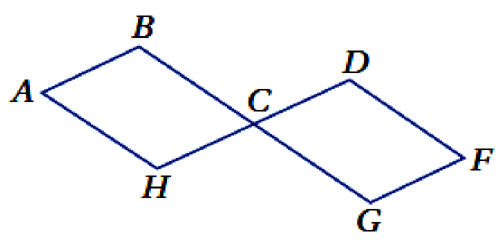
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



2) برهان ذا عمودين

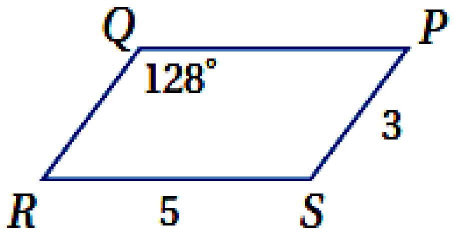
المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



الحل :

استعمل PQRS ▱ المبين جانبا لإيجاد كل مما يأتي :



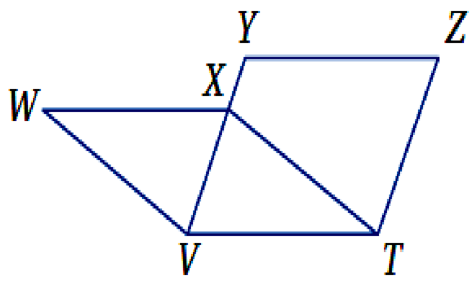
m<R (1 | QR (2

QP (3 | m<S (4

الحل :

''

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :



17) المعطيات: $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

الحل :

''

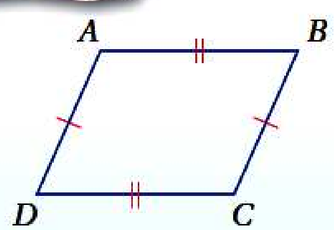
تمييز متوازي الأضلاع 5 – 3

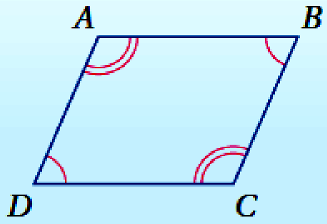
نظريات **شروط متوازي الأضلاع**

أضف إلى مطويتك

5.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

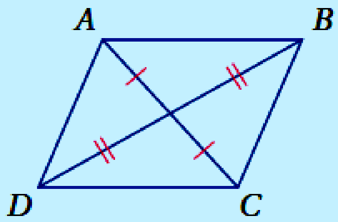
مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.





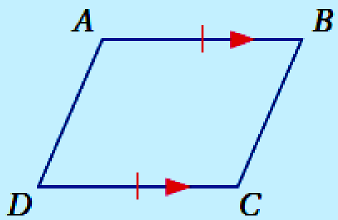
5.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C\,,\ \angle B \cong \angle D$ ، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



5.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منها الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AC}\,,\ \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



5.12 في الشكل الرباعي، إذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}\,,\ \overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم: إثبات أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع

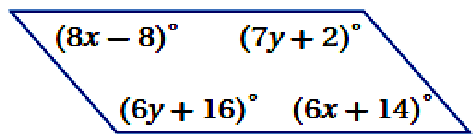
أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقق أيًا من الشروط الآتية:

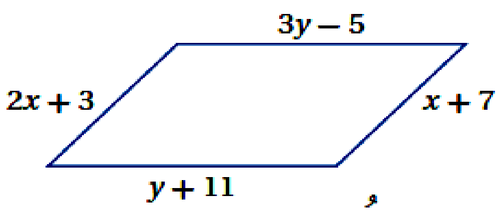
1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)
2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)
3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4)

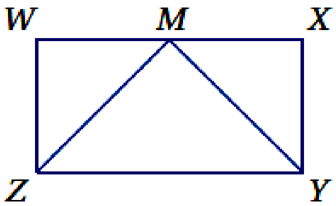


5)



الحل :

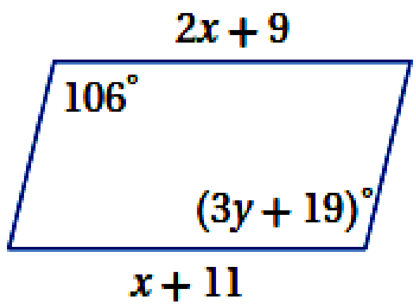
برهان: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع،
حيث $\angle X \cong \angle W$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ،
فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.



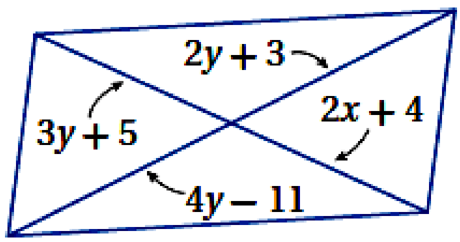
الحل :

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(1



(2



الحل :

المستطيل 4 – 5

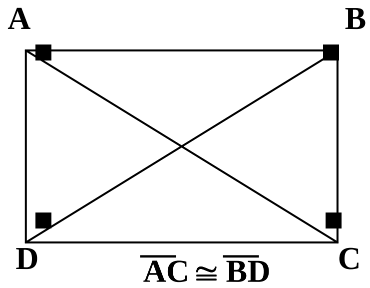
خصائص المستطيل :

المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم ولأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان فإنه □الة خاصة من متوازي الأضلاع لذلك فللمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع بالإضافة إلي أن قطريه متطابقان

‘‘

النظرية 13 – 5

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلا فإن قطريه متطابقان

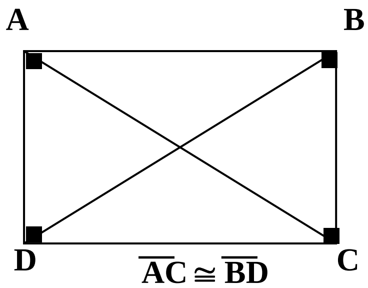


‘‘‘

إثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل :

النظرية 14 – 5

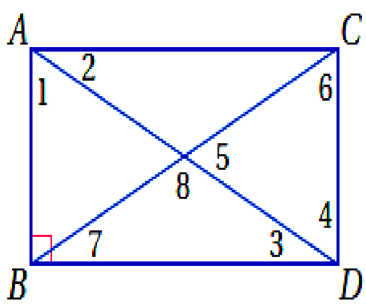
إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنه مستطيل



‘‘‘

في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40$ ،

فأوجد كلًّا مما يأتي :



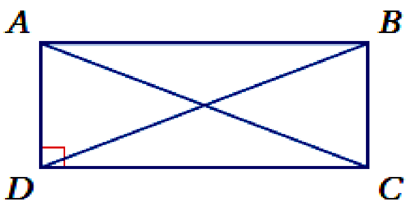
26) $m\angle 1$ 27) $m\angle 7$ 28) $m\angle 3$

29) $m\angle 5$ 30) $m\angle 6$ 31) $m\angle 8$

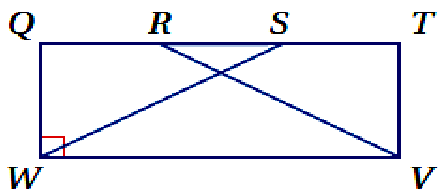
الحل :

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



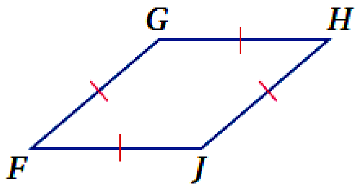
21) **المعطيات:** $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



الحل :

المربع والمعين 5 ـــ 5

خصائص المعيّن والمربّع:

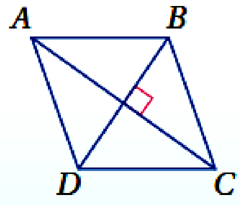


المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :

نظريات — **قطرا المعيّن**

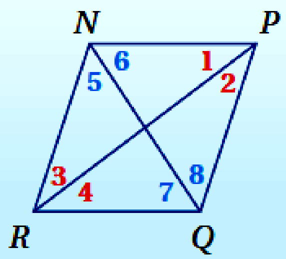
أضف إلى مطويتك

5.15 إذا كان متوازي أضلاع معينًا فإنّ قطريه متعامدان.



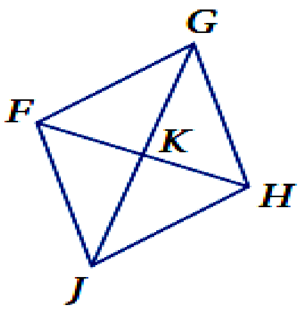
مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.16 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.



مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ
$\angle 1 \cong \angle 2\ ,\ \angle 3 \cong \angle 4\ ,\ \angle 5 \cong \angle 6\ ,\ \angle 7 \cong \angle 8$

استعن بالمعين HGHJ في الشكل المقابل

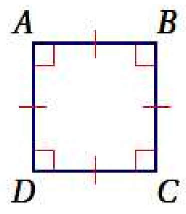


1) إذا كان FK = 5 , FG = 13 ، فأوجد KJ

الحل :

2) جبر : إذا كان $m\angle KFG = (9y - 5)^\circ$ ، $m\angle JFK = (6y + 7)^\circ$ ، فأوجد قيمة y

الحل :



المربع $ABCD$

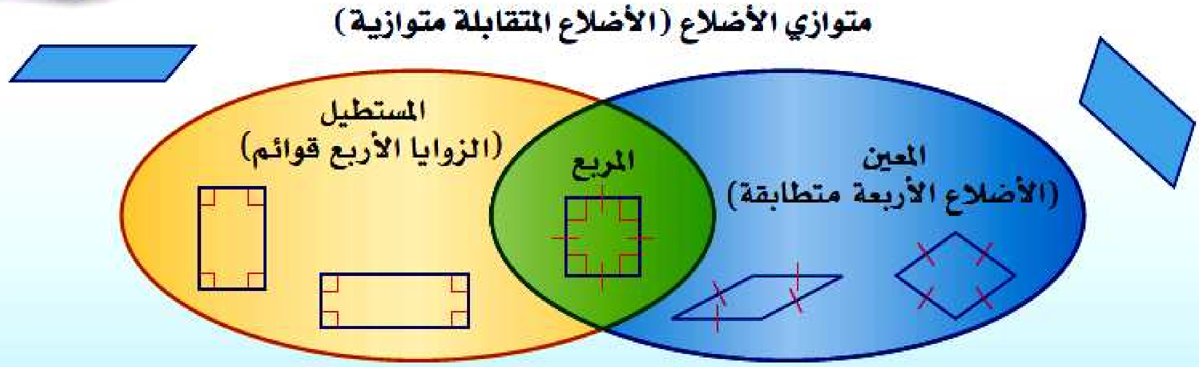
المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا.

ويلخص شكل فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

متوازي الأضلاع



جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

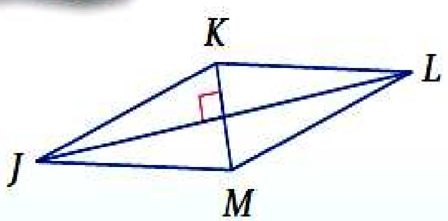
إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

نظريات

أضف إلى مطويتك

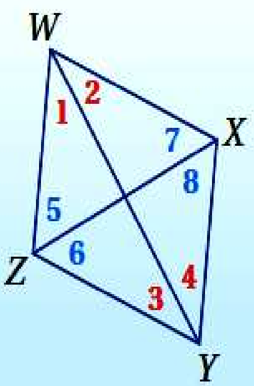
الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

5.17 إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن. (عكس النظرية 5.15)



مثال: إذا كان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ ، فإنّ $\square JKLM$ معيّن.

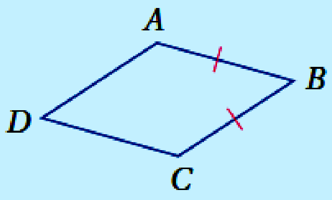
5.18 إذا نصّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا. (عكس النظرية 5.16)



مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2 , \angle 3 \cong \angle 4$ ،
أو $\angle 5 \cong \angle 6 , \angle 7 \cong \angle 8$ ،
فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.

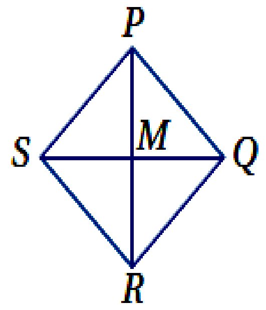
5.19 إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه معيّن.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، فإنّ $\square ABCD$ معيّن.



5.20 إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.

اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـِ $\overline{PR}$.

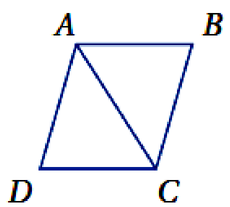
$\overline{PR}$ عمود منصّف لـِ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

الحل :

جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.



1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

2) إذا كان $AB = 2x + 3 , BC = x + 7$، فأوجد CD.

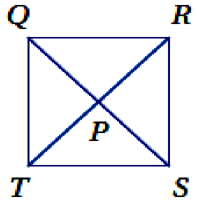
الحل :

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

12) المعطيات: $QRST$ متوازي أضلاع.

$\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90^\circ$

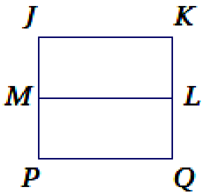
المطلوب: $QRST$ مربّع.



13) المعطيات: $JKQP$ مربّع.

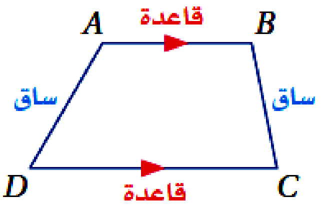
$\overline{ML}$ تنصّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.

المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.



الحل :

شبه المنحرف وشكل الطائرة الو□قية 6 – 5



خصائص شبه المنحرف: شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكونتان من قاعدة وأحد ضلعي الساقين.
ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبين جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$ ، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

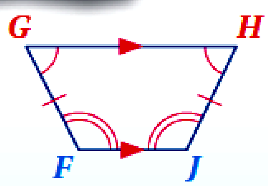
إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

نظريات

أضف إلى مطويتك

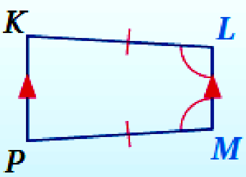
شبه المنحرف متطابق الساقين

5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.



مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle J \cong \angle F$, $\angle H \cong \angle G$.

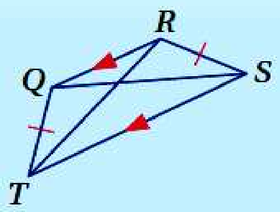
5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.



مثال: إذا كانت $\angle M \cong \angle L$ فإنّ شبه المنحرف $KLMP$ متطابق الساقين.

5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{QS} \cong \overline{RT}$. وكذلك إذا كان $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ فإنّ شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين.



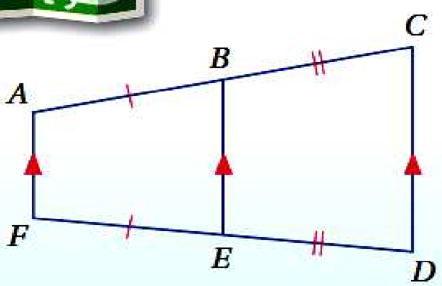
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

نظرية 5.24 نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

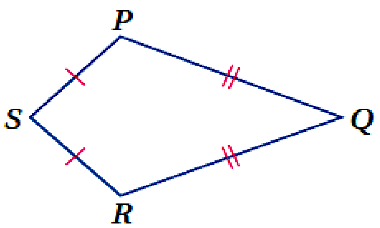
أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

مثال: إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$، فإنّ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.



خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.

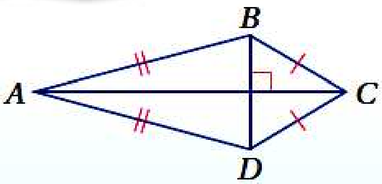


نظريات شكل الطائرة الورقيّة

أضف إلى مطويتك

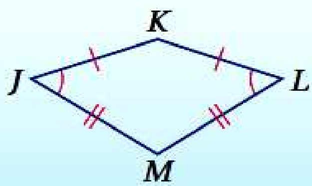
5.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.

مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



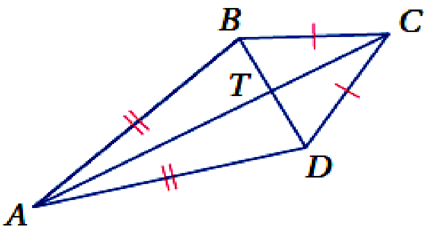
5.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة.

مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \ncong \angle M$.



إذا كان $m\angle BCD = 50^\circ$, $m\angle BAD = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle ADC$.

إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD.

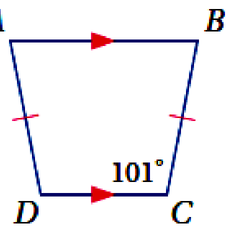


الحل :

''

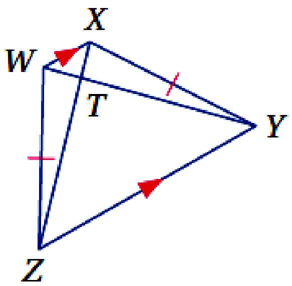
أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$



2) WT، إذا كان:

$ZX = 20, TY = 15$

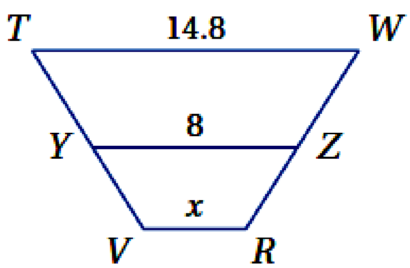


الحل :

''

إجابة قصيرة: في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.

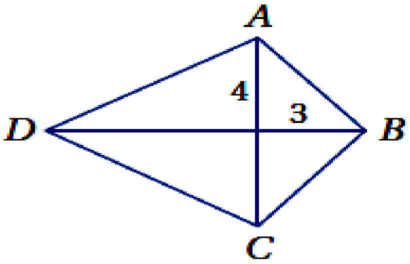
الحل :



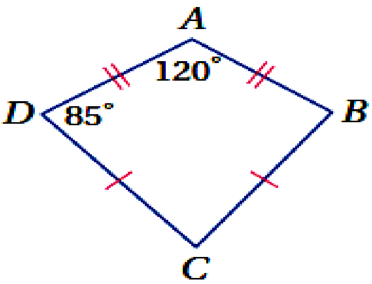
''

إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB



7) $m\angle C$

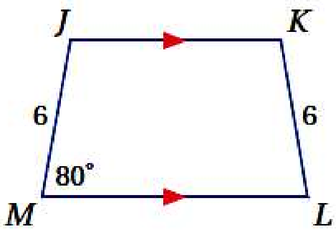


الحل :

''

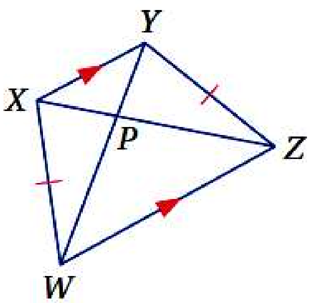
أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



9) PW، إذا كان:

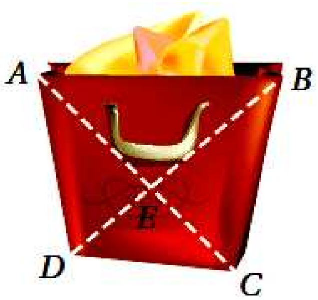
$XZ = 18, PY = 3$



الحل :

''

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in، $m\angle ABE = 40°$, $m\angle EBC = 35°$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



33) AE 34) AC

35) $m\angle BCD$ 36) $m\angle EDC$

الحل :